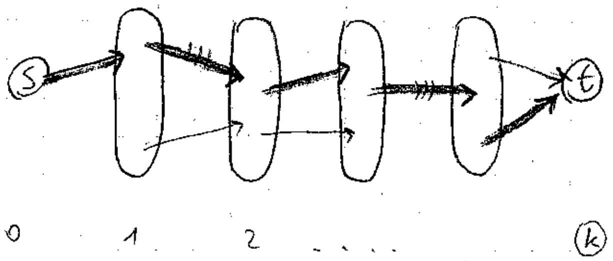
אלגוריתם של דיניץ DINIC

הרעיון הוא לבנות רשת שכבתית מהרשת השיורית, למצוא הרבה מסלולים משפרים באותה רשת שכבתית, כל עוד t נגיש מ-s, ורק כאשר t לא נגיש יותר, נבנה רשת שיורית חדשה.



k שכבות

לאחר מציאת מסלול משפר, נצרך דרכו זרימה השווה לקיבול השיורי המינימלי של המסלול ונמחק את כל הקשתות הרוויות.

נפחית את קיבול הקשתות האחרות של המסלול ונתעלם מן הקשתות ההפוכות לקשתות ברשת השכבתית. כי שימוש בהן יוביל למסלול באורך הגדול מ-k.

עכשיו נוכל לכאורה להריץ שוב BFS על הרשת השכבתית החדשה, במקום זאת, נמצא את כל המסלולים המשפרים ע"י הרצת "DFS" על הרשת השכבתית מ-s.

ל-DFS יש 3 פרוצדורות:

Advance(u) $(u\neq t)$ - אם אין קשת יוצאת מ-u, לך ל retreat(u).
אם יש קשת כזאת (u,v) אז לך ל-v ונמשיך ברקורסיה
לבצע Advance(v). $(v\neq t)$
אם $v=t$ נבצע Augment.

Retreat(u) - אם $u=s$ אז סיום השלב ברשת השכבתית הנוכחית. כלומר סוף הפאזה הנוכחית.

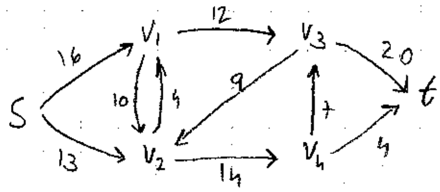
אחרת, נמחק את u ואת כל הקשתות הנכנסות אליו, נחזור אל האב v שקדם ל-u ונבצע Advance(v).

Augment - (מסלול משפר) נזרים זרימה נוספת לאורך המסלול, נמחק קשתות רוויות, נקטין קיבול של שאר הקשתות ונחזור לצומת ההתחלה (u) של הקשת הרוויה הכי קרובה ל-s במסלול ונבצע Advance(u).

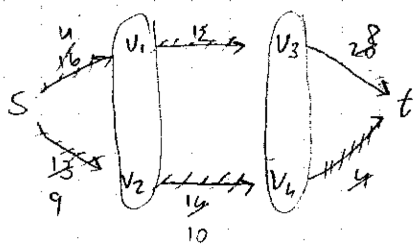
כל עוד קיים מסלול ברשת השכבתית מ-s ל-t, האלגוריתם ימצא אותו. כל קשת שנמחקת לא שייכת לשום מסלול משפר שהוא באורך k.
לכן, כשאין כבר מסלול מ-s ל-t ברשת השכבתית, אז אין מסלול משפר באורך k ברשת השיורית, ואז נעבור לפאזה חדשה.
בפאזה החדשה, קודם נעדכן את הזרימה f ברשת המקורית ע"י כל הזרימה הנוספת שנצברה בפאזה. נבנה רשת שיורית חדשה G_f, נבנה רשת שכבתית חדשה ונתחיל ב-DFS מ-s.

נסתכל על דוגמאת הרצה של האלגוריתם:

$f=0$ $\quad G_f=G$

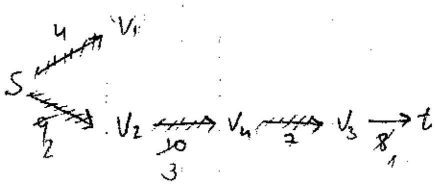


לאחר ריצת BFS:



(*) מתחילים במסלול התחתון, הגענו ל-t, מעדכנים זרימה. הקשת האחרונה רוויה, מוחקים אותה. חוזרים ל-v_4 אין לאן להתקדם, מוחקים קשת וחוזרים ל-v_2, אין לאן להתקדם, חוזרים ל-s, מנסים להתקדם ומוצאים את המסלול העליון ל-t. גם במסלול העליון יקרה מה שקרה בתחתון, נחזור ל-s, אין לאן להתקדם, סיימנו עם הרשת השכבתית הזו.

נעדכן את הקיבולים החדשים ונריץ שוב BFS.



מתחילים ב-v_1, אין ממנו מוצא ולכן אנו מוחקים את הקשת אליו. נחזור ל-s, נבצע התקדמות עד שנגיע ל-t ואז נבצע חזרות עד שנסיים את הפאזה.

ברשת החדשה הגענו לזרימה מקסימלית והאלגוריתם מסתיים.

<u>נכונות</u> בכל פאזה הרשת השכבתית מכילה רק קדמיות וקשתות שיכולים להופיע על המסלולים משפרים באורך k (k = מספר השכבות).

לסיכום, בסוף הפאזה, אין מסלולים משפרים ברשת השכבתית, ולכן אין מסלולים משפרים מ-s ל-t באורך k ברשת השיורית.

הוכחנו שהמרחק מ-s ל-t עולה חלש לאחר כל שיפור ולכן, בסוף פאזה, מרחק t מ-s ברשת השיורית ממש גדול מ-k.

ולכן, ברשת השכבתית בפאזה החדשה, מספר השכבות יהיה גדול ממש מ-k. לכן, מספר הפאזות קטן או שווה ל-$(|V|-1)$.

<u>יעילות בפאזה אחת</u>

לקשת שמחקנו נקרא קשת חסומה.

כמה צעדים מבצע ה-DFS בין שתי חסימות עוקבות? לכל היותר k. ורשום $O(V) \ge O(k)$
(*) כי עד שהוא נתקע הוא מבצע רק צעדים קדימה.

מספר החסומות הוא לכל היותר $|E|$.

לכן, עלות בפאזה היא $O(|E|\cdot|V|)$. ומכאן שהאלגוריתם רץ בזמן $O(|E|\cdot|V|^2)$. (לעומת $O(|E|^2\cdot|V|)$ ש אדמונד-קארפ).

6.1.09

3

אלגוריתמים - שיעור 10

רשתות 0/1

רשתות שקיבול כל קשת הוא 1 (או 0), האלגוריתם של דיניץ יעיל מאוד על רשתות כאלו.

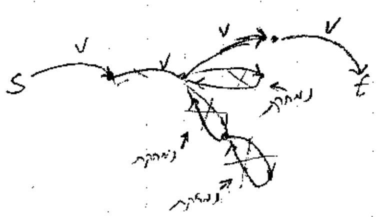
בפאזה אחת של דיניץ לוקחת $O(E)$ זמן. בתחילת הדרך $G_f=G$ וכל הקיבולים 1. בכלל לכל f במהלך האלגוריתם, כל הקיבולים ב-G_f הם 1. כי אחרי מסלול משפר, שדרכו זורמת זרימה נוספת 1 כל הקשתות עליו נהיות רוויות ולכן יוצאות מהרשת השיורית.

וכל הקשתות ההפוכות נכנסות לרשת השיורית עם קיבול שיורי 1.

לכל קשת מקורית או היא או ההפוכה שייכת ל-G_f עם קיבול 1 (ובכל קשת מקורית, בכל שלב, הזרימה היא 0 או 1.

כשמבצעים Augment (בניגוד למקרה הכללי) מוחקים בדיוק k קשתות ולכן ה-Augment היא $O(k)$. בין אחד לשני מספר הצעדים פרופורציונלי ל-(k + מספר הקשתות שנמחקו בגלל דרכי תקועים).

דוגמא לריצה עם חזרות



לכן, בפאזה אחת לוקחת $O(|E|)$, מספר הפאזות חסום ע"י $O(|V|)$ ולכן ריצת דיניץ מתבצעת בזמן $O(|V||E|)$ על רשתות 0/1.

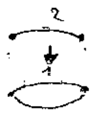
אנחנו נראה שגם מספר הפאזות קטן מ-$O(|V|)$.

(*) כל הצמתים המסומנים ב-V וסולקו ע"י ה-Augment

באופן כללי, מספר הפאזות ברשת 0/1 הוא $O(|E|^{\frac{1}{2}})$.

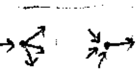
ברשת 0/1 מטיפוס 1 יש $O(|V|^{2/3})$ וברשת מטיפוס 2 יש $O(|V|^{\frac{1}{2}})$ פאזות.

ולכן זמן הריצה יהיה $O(|E|^{\frac{3}{2}})$ במקרה הכללי, $O(|E||V|^{\frac{2}{3}})$ במקרה של טיפוס 1 ו-$O(|E|\cdot|V|^{\frac{1}{2}})$.



(וגם לא אנטי מקבילות)

רשת מטיפוס 1 היא רשת בה אין קשתות מקבילות. רשתות עם קשתות מקבילות נוצרות בד"כ כאשר רוצים להזרים יותר מ-1 לקודקוד מסוים.



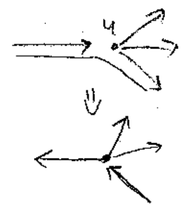
רשת מטיפוס 2 היא רשת בה לכל צומת יש דרגת כניסה אחת או דרגת יציאה אחת.

<u>הערה חשובה:</u> טיפוס הרשת נשמר גם ברשתות השיוריות. (נכון לטיפוס 1).

טיפוס 2 נשמר גם הוא, לאחר כל שיפור, מזרימים זרימה נוספת של 1 במסלול משפר, כל הקשתות שלו נהיות רוויות ונמחקות מ-G_f וכל הקשתות ההפוכות נכנסות ל-G_f.

אם המסלול המשפר לא עבר דרך u אין שינוי.

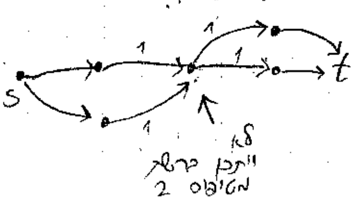
אם המסלול כן עבר דרך u, בדיוק 2 קשתות יתהפכו והטיפוס נשמר.



נראה שמספר הפאזות ברשת כללית היא $O(|E|^{\frac{1}{2}})$ וברשת מטיפוס 2 היא $O(|V|^{\frac{1}{2}})$

<u>טענה</u>: נניח שהזרימה הנוכחית היא 0 ושערך הזרימה המקסימלית M אז מספר השכבות ברשת השכבתית היא לרשת מטיפוס 2 $k \le \frac{|V|-2}{m}+1$ ולרשת הכללית $k \le \frac{|E|}{M}$.

<u>הוכחה</u>: נסתכל על הזרימה המקסימלית f ונסתכל על הקשתות הרוויות בזרימה 1. הן מהוות מסלולים מ-s ל-t שזרים בקשתות.



המצב המתואר בתרשים לא ייתכן ברשת מטיפוס 2 ולכן המסלולים זרים בצמתים פנימיים.

λ - אורך המסלול הקצר ביותר מבין אלו (שבנינו באמצעות הזרימה המקסימלית). מספר המסלולים היא בדיוק M (כי בכל מסלול זורמת זרימה 1 והזרימה המקסימלית היא M).

ברשת הכללית, סה"כ המסלולים משתמשים לפחות $\lambda \cdot m$ אך גם מתקיים $\lambda \cdot m \le |E|$ כי המסלולים זרים בקשתות וקיבלנו $\lambda \le \frac{|E|}{M}$.

ברשת מטיפוס 2, המסלולים משתמשים לפחות ב- $M(\lambda-1)$ צמתים פנימיים, אך מתקיים $M(\lambda-1) \le |V|-2$ וקיבלנו $\lambda \le \frac{|V|-2}{M}+1$.

אבל $k \le \lambda$ כי k הוא אורך מינימלי של מסלול כלשהו מ-s ל-t.

נריץ את דיניץ עד הפאזה שבתחילתה, ערך הזרימה הנוכחית עובר לראשונה (או שווה ל) $M - V^{\frac{1}{2}}$. כאשר M הוא ערך הזרימה המקסימלית.

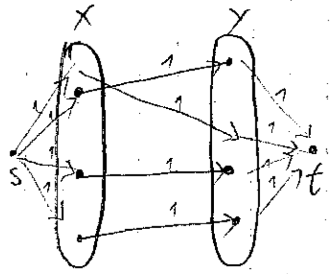
מרגע זה ואילך יש לכל היותר $|V|^{\frac{1}{2}}$ פאזות כי כ"א מגדילה את ערך הזרימה לפחות ב 1.

נסמן ב- F את ערך הזרימה בתחילת הפאזה. $F < M-|V|^{\frac{1}{2}}$. נשתמש את הטענה עבור G_f כרשת מקורית כאשר כרגע זורמת דרכה זרימה 0. המקסימום הנותר שניתן להזרים הוא $M-F > |V|^{\frac{1}{2}}$.

(A) לפי הטענה, מס' השכבות k בפאזה הנוכחית $k \le \frac{|V|-2}{M^*}+1 \le |V|^{\frac{1}{2}}+1$ זרימה מקסימלית ב- G_f השווה $M-F > |V|^{\frac{1}{2}}$.

כלומר מספר הפאזות עד לרגע זה הוא לכל היותר $|V|^{\frac{1}{2}}+1$.

עבור המקרה הכללי נוכל להגיע ב-(A) את $|E|^{\frac{1}{2}}$ במקום $|V|^{\frac{1}{2}}$ וטענה $k \le \frac{|E|}{M^*} \le |E|^{\frac{1}{2}}$. שאר ההוכחה זהה.



זיווג מקסימלי

G גרף דו"צ $V = X \underset{\text{זר}}{\cup} Y$, $E \subseteq X \times Y$ למצוא אוסף מקסימלי של הקשתות ב-E אשר זרות בקדקודים.

ניתן להפוך את בעיה הזו לבעיית זרימה ע"י הוספת צמתים s ו-t, כיוון הקשתות והגדרת קיבול 1.

נחשב זרימה מקסימלית, והקשתות E הרוויות מהוות זיווג מקסימלי.

F = ערך הזרימה המקסימלית.

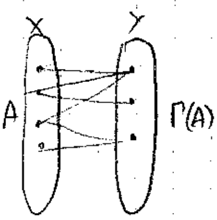
M - גודל הזיווג המקסימלי.

אנו רוצים להראות ש $M=F$.

זרימה היא זיווג כי דרך כל קשת רוויה זורמת זרימה של 1 ובגלל טיעון 2, אין 2 קשתות כאלו מאותו צומת ב-X או לאותו צומת ב-Y.

זמן הרצה $O(|E||V|^{\frac{1}{2}})$

משפט Hall

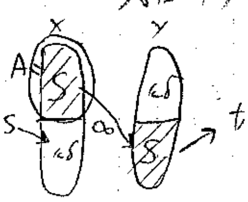


יהי G גרף דו"צ $V = X \cup Y$, $E \subseteq X \times Y$, $|X|=|Y|$.

לכל $A \subseteq X$ (נסמן ב-$\Gamma(A)$ את כל השכנים של צמתים של A ב-Y. יש ל-G יש זיווג מושלם (כלומר זיווג בגודל $|X|=|Y|$) אמ"מ מתקיים שלכל $A \subseteq X$ ⇐ $|\Gamma(A)| \geq |A|$

(⇒) אם קיים זיווג מושלם התנאי מתקיים.

(⇐) להיפך, נבנה את רשת הזרימה אבל נשנה את הקיבולים של כל קשתות E ל-∞.
נניח שלא קיים זיווג מושלם ← $\underset{\text{גודל זיווג מקסימלי}}{M} < n = |X| = |Y|$ $M=F$. ערך זרימה מקסימלית



(נסמן) ב-G_f לפי הזרימה המקסימלית f, נסמן ב-S את כל הצמתים ברשת השיורית הנגישים מ-s. $t \notin S$ אך $s \in S$.

הטענה היא כי $\Gamma(A) \subseteq S$ (כי אם יש לי קשת שיוצאת מ-A, הקיבול שלה היה ∞ ולכן לא חשובה הזרימה היא עדיין ברשת).

$$M = C(S, V/S)$$

מס יוצאות $n-|A|$ קשתות, נוסיף לכך את $\Gamma(A)$
ואנו יודעים כי $n > n-|A|+|\Gamma(A)|$, וקיבלנו $|\Gamma(A)|<|A|$ וזו סתירה.