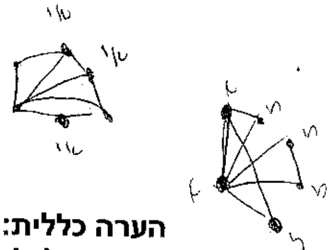


אלגוריתמים – תרגיל 1

תאריך הגשה: 28.11.08

הערה כללית:
תשובות לכל השאלות צריכות לכלול תאור אלגוריתם, הוכחת נכונות וסיבוכיות.

1. תנו תנאי הכרחי ומספיק לקיום מסלול אוילר בגרף לא מכוון, והוכיחו את נכונותו.

2. א. תנו תנאי הכרחי ומספיק לקיום מעגל אוילר ולקיום מסלול אוילר בגרף מכוון, והוכיחו את נכונותו.
   ב. הוכיחו שאם בגרף לא מכוון וקשיר יש בדיוק 2k קודקודים מדרגה אי-זוגית, אז ניתן לחלק את קשתותיו ל-k מסלולים זרים (בקשתות).

3. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$, שבו לכל הקודקודים דרגה 4. הוכיחו שניתן לצבוע את קשתות הגרף באדום ובכחול, כך שלכל קודקוד יהיו שתי קשתות אדומות ושתיים כחולות.

4. גרף $K_{m,n}$ מכיל m+n קודקודים: $v_1,v_2,\ldots,v_m, w_1,w_2,\ldots,w_n$. כל אחד מקודקודים מסוג v מחובר ל-n קודקודים מסוג w. כל אחד מקודקודים מסוג w מחובר ל-m קודקודים מסוג v.
   עבור איזה ערכים m,n קיים בגרף מעגל אוילר ? מסלול אוילר ?

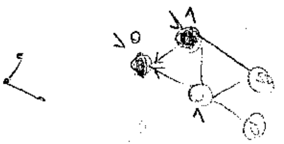
5. נתונה קבוצה של אבני דומינו (בכל אבן שני מספרים בין 1 ל- 6). תארו אלגוריתם יעיל הבודק אם ניתן לסדר אותן בשורה אחת באופן חוקי. אם כן - האלגוריתם מחזיר סידור כזה.

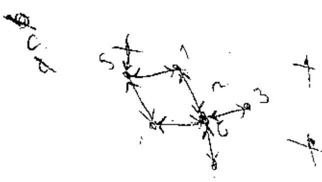
6. גרף לא מכוון פשוט ייקרא ***"כמעט דו-צדדי"*** אם הוא דו-צדדי, או שקיימת קשת שהסרתה מהגרף תהפוך אותו לדו-צדדי. תארו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V|\cdot|E|)$ ומחליט אם גרף הוא כמעט דו-צדדי.

7. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון, ו- s קודקוד ב- V. קשת (u,v) תקרא *מעגלית* אם המרחק של u מ- s שווה למרחק של v מ- s.
   א. תארו אלגוריתם לינארי שמוצא את כל הקשתות המעגליות ב- G.
   ב. כמו א, כאשר לכל קודקוד יש רק 2 ביטים שבהם ניתן לשמור מידע עבורו (במקום השדות שה- BFS מחזיק. זאת בנוסף לקלט ולתור שמחזיק ה- BFS).
   הוכיחו את נכונות האלגוריתמים ונתחו את סיבוכיותם.

8. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V|\cdot|E|)$ ומוצא מעגל מכוון קצר ביותר, אם קיים, ב- G.

9. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, ו- s,t קודקודים ב-V. רוצים למצוא את גרף המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-t.





1. תנאי הכרחי ומספיק לקיום מסלול אוילר בגרף לא מכוון והוכחת נכונותו.

טענה: גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ מכיל מסלול אוילר (שאינו מעגל) $\Leftrightarrow$ ל-2 צמתים בגרף יש דרגה אי זוגית ולשאר הצמתים דרגה זוגית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתחיל לעבור על מסלול אוילר מהקודקוד הראשון במסלול V_1. אנו יוצאים מ-V_1 (מבלי להכנס אליו תחילה) לכן, עד כה מספר הקשתות "שהתגלו" ב-V_1 הינו אי זוגי. מעתה, כל קודקוד שאליו נכנס גם נצא (פרט לאחרון).
לכן, בכל קודקוד שנעבור, מספר הקשתות "שהתגלו" יגדל ב-2 וישאיר את הדרגה של כל קודקוד להיות זוגית. אם נעבור בדרך שוב ב-V_1, הדרגה "תגדל" ב-2 ותישאר אי זוגית. לבסוף נגיע לקודקוד V_k, נעמוד ונכריז הקודקוד לא כעבר, אם יצאנו ממנו. לכן, עד כה "התגלתה" עבור V_k עד כה דרגה זוגית, בסוף התהליך נכנס אל V_k ונגדיל את דרגתו ב-1 לאי זוגית, (היות ואין יציאה מהקודקוד הסופי).
סה"כ קיבלנו שלכל הקודקודים בגרף דרגה זוגית, פרט לקודקוד הראשון והאחרון להם דרגה אי זוגית. נשים לב שהקודקוד הראשון והאחרון שונים, כי אם לא, מדובר היה במעגל אוילר.

$\Rightarrow$ נניח של-2 צמתים דרגה אי זוגית ולשאר הצמתים דרגה זוגית ונראה כי קיים מסלול אוילר.

א. נבחר את אחד משני הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית (נסמנו u_s), את הקודקוד השני נסמן u_e. נתחיל לייצר מסלול באופן הבא: נבחר קשת $\langle w,u_s \rangle$, נוציא אותה מהגרף ונוסיף למסלול. נמשיך כך עד שנגיע ל u_e.

ב. אם לאחר סעיף א, נשארו בגרף קשתות, מדובר במעגלים. לכן, נבחר קודקוד u עם קשתות ונבנה מסלולים בקומה למסלול שבנינו בסעיף א (כלומר פעם עד שנחזור לקודקוד ההתחלה u). את המעגלים שיצרו נדרש למסלול שבנינו בסעיף א.

הוכחת נכונות:

- מכיוון האלגוריתם לכל הצמתים דרגה זוגית פרט ל-2 צמתים מתחילים מקודקוד של דרגה אי זוגית. בעת ריצת האלגוריתם, לכל צומת אנו מבקרים כניסה ויציאה ומורידים את הקשתות בהן נכנסנו ויצאנו. היות ולכל צומת נכנס ויצא מספר שווה של פעמים (פרט לראשונה והאחרונה), הדרגה של כל צומת תהיה זוגית. לצומת הראשונה והאחרונה תהיה יציאה וכניסה נוספת (בהתאמה) ולכן דרגתן אי זוגית (צומת הכניסה והיציאה שונות).

- בשלב ב, אם נשארו עדיין קשתות הן מרכיבות מעגלים, לכן, כפי שהוכחנו בכיתה, לכל צומת תהיה דרגה זוגית (כך שהדרגה הכללית של הצומת לא מושפעת).

- קיימת לכל צומת יש דרגה זוגית (פרט לראשונה והאחרונה), מה לכל צומת

במסלול שמצאנו. היות והוא חלק ממעגל, ניתן לבחור בו׳ כצומת ההתחלה והסיום של המעגל ועי׳ כך לדרוך אותו למסלול. כך נוכל להמשיך ולהגדיל את המסלול עד שנעבור על כל הקשתות.

<u>זמן ריצה</u>

את הגרף נייצג ברשימות שכנות. ואת המסלול נייצג כרשימה מקושרת. עם מצביעים לראש וסוף הרשימה.

בשלב הראשון, אנו מתחילים ב- u_s ועוברים מצומת לצומת ע״י בחירה בצומת הראשון ברשימה ב $O(1)$. בכל מעבר אנו גם מבטלים את הקשת מן הגרף [$O(1)$] ומוסיפים את הצומת למסלול [$O(1)$]. סה״כ לכל <u>מעבר</u> סיבוכיות ז״ר היא $O(1)$.

בשלב השני, נעבור על כל אחד מהצמתים שברשימת המסלול שלנו ונבדוק האם נשארו בהם קשתות. אם כן נבצע שוב את השלב הראשון ע״י הוספת הצמתים במקום הנוכחי. נמשיך כך עד סוף הרשימה. הוספת כל קשת גם כאן תיקח $O(1)$ (מאותם שיקולים של השלב הראשון).

היות וכל קשת יכולה ״לעבור״ למסלול פעם אחת בלבד, עלות העברת הקשתות היא $O(|E|)$. כמו כן, מכיוון שאורך המסלול אותו אנו סורקים בשלב השני הוא לכל היותר ככמות הקשתות, עלות הסריקה שלו גם היא $O(|E|)$.

סה״כ סיבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם <u>$O(|E|)$</u>.

<u>הערה</u> בפתרון התייחסתי למעגל אוילר כמקרה נפרד ממסלול אוילר (למרות שניתן להסתכל עליו כמקרה פרטי של מסלול אוילר) כדי לחדד את התנאים לקיום מסלול כזה.

ניתן להרחיב את הפתרון למדויות גם למעגלי אוילר ע״י החלשת התנאי ולקבל גם את המקרה בו כל הצמתים בעלי דרגה זוגית (את ההוכחה למקרה זה לא שיניתי בתרגיל).

2. א) תנו תנאי הכרחי ומספיק לקיום מעגל אוילר וקיום מסלול אויל בגרף מכוון.

טענה א: גרף מכוון וקשיר מכיל מעגל אוילר ⟺ לכל קודקוד בגרף דרגת היציאה ודרגת הכניסה שוות.

הוכחה:

⟸ נתחיל מקודקוד v כלשהו, בכל פעם שעוברים דרך קודקוד u≠v נכנסים אליו בקשת אחת ויוצאים בקשת אחרת, כלומר דרגת הכניסה ודרגת היציאה שוות.

עבור קודקוד v, היציאה מהקודקוד (במעבר הראשון) תורמת 1 לדרגת היציאה והכניסה אליו בסוף התהליך תורמת 1 לדרגת הכניסה. בכל פעם שנעבור בדרך בקודקוד v נוסיף 1 לדרגת הכניסה והיציאה, כלומר, קיבלנו שגם עבור v דרגת הכניסה = דרגת היציאה.

⟹ נניח שלכל קודקוד בגרף דרגת יציאה וכניסה שוות ונראה אלגוריתם למציאת מעגל אוילר.

נבחר קודקוד u בגרף ונגדיר את המעגל: נבחר קשת יוצאת (w,v) נשמיט אותה מן הגרף ונוסיף למעגל. נמשיך מ-w כמו u בגלגול הקודם וכך הלאה עד שנחזור אל v.(1)

אם בתום התהליך נשארו קשתות בגרף, נבחר קודקוד שהופיע כבר במעגל שיצרנו(2) ונבצע ממנו את אותו התהליך, נמשיך כך עד שלא יהיו יותר קשתות בגרף. ונחבר בכל פעם מעגל חדש אותו נצרף למעגל שכבר בנינו.(3)

הערות נוספות:

(1) – לכל קודקוד דרגת היציאה והכניסה שווה לכן מכל קודקוד שאליו נכנס נוכל גם לצאת עד שנחזור לקודקוד ההתחלה.

(2) – בסוף השלב הראשון, נוכל לבחור קודקוד שכבר הופיע במעגל שיצרנו כיוון שהגרף קשיר.

(3) – בכל פעם שנבנה מעגל חדש, הוא יתחיל בקודקוד שכבר הופיע במעגל שיצרנו קודם, נוכל לחברם למעגל רציף (כי קודקוד ההתחלה והסוף של המעגל החדש הוא אותו הקודקוד והוא שייך למעגל הקודם).

– היות ומספר הקשתות הוא סופי, בסופו של דבר האלגוריתם יעצור.

– כיוון שאנו מוחקים קשתות שעברנו עליהן מהגרף, במעגל שניצור נעבור על כל קשת פעם אחת בלבד.

זמן ריצה

את הגרף נייצג ברשימת שכנות (כאשר לכל קודקוד תהיה רשימת קודקודים אליהם יש קשת יוצאת מהקודקוד הנוכחי). את המעגל נייצג ברשימה מקושרת עם מצביעים לתחילה ולסוף.

המשך פתרון שאלה 2 ב

טענה ב: גרף מכוון וקשיר מכיל מסלול אוילר ⟺ לכל צומת בגרף דרגת יציאה ודרגת הכניסה שוות, פרט ל-2 צמתים $u \neq v$ בהם דרגת היציאה של u גדולה ב-1 מדרגת הכניסה שלו ודרגת הכניסה של V גדולה ב-1 מדרגת היציאה שלו.

הוכחה: נוסיף קשת מכוונת היוצאת מ-V אל u. עתה דרגת היציאה והכניסה של כל הצמתים שוות בכל צומת (כולל u ו-V) ולכן קיים מעגל אוילר. היות ומדובר במעגל, נבחר את u להיות הצומת הראשונה ונמחק את הקשת מ-V ל-u שהוספנו. נקבל מסלול אוילר המתחיל ב-u ומסתיים בצומת V כנדרש.

⊠

ב: הוכח: אם בגרף לא מכוון וקשיר יש בדיוק 2k קודקודים מדרגה אי זוגית, אז ניתן לכסות את הקשתות ב-k מסלולים זרים (בקשתות).

הוכחה: נחלק את קודקודי הגרף האי זוגיים ל-k זוגות. ובין כל זוג נוסיף קשת. הוספנו k קשתות לגרף ועתה דרגת כל הקודקודים בגרף היא זוגית.

היות ודרגת כל הקודקודים זוגית וכן הגרף קשיר, קיים בגרף מעגל אוילר, נוכל להתייחס אל המעגל כמסלול. הוצאת הקשתות שהוספנו לגרף תפרק את מסלול אוילר ל-k מסלולים שונים כנדרש.

משל ⊠

3. <u>נתון</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ שבו לכל הקודקודים דרגה 4.

<u>צ"ל</u>: שניתן לצבוע את קשתות הגרף בצבעים (אדום, כחול), כך שלכל קודקוד יהיו 2 קשתות אדומות ו-2 כחולות.

<u>הוכחה</u>: נתאר אלגוריתם לפתרון הבעיה:

לכל הקודקודים בגרף דרגה 4 ולכן קיים מעגל אוילר. נמצא מעגל זה כפי שנלמד בכיתה.

לאחר מציאת המעגל, נסרוק אותו קשת אחר קשת. בכל מעבר מצומת לצומת נצבע את הקשת המחברת בין הצמתים באדום או כחול לחילופין (הראשונה באדום, השניה בכחול וכו').

בסיום סריקת המעגל ביקרנו בכל הקשתות ולכל קשת נתנו צבע. כך שלכל קודקוד 2 קשתות אדומות ו-2 כחולות.

<u>הוכחת נכונות</u>

- כל הקשתות בגרף יצבעו באחד מהצבעים הנ"ל ואנו עוברים על כולן בעת בניית מעגל אוילר. לכן, כל הקשתות יהיו במעגל וכשנסרוק אותו נעבור עליהן ונצבע כל אחת. כמו כן, עפ"י הגדרת מעגל אוילר אנו עוברים על כל קשת פעם אחת <u>בדיוק</u> לכן לא יתכן שקשת תשנה את צבעה.
- אנו צובעים את הקשתות לחילופין, לכן ברגע שנכנס אל צומת, אם צבענו את קשת הכניסה באדום, אז נצבע ביציאה מצומת זו קשת יציאה בכחול. לכן, בכל הצמתים שבתוך המעגל נשמר תמיד מאזן הצבעים (חוץ מקום ההתחלה) - לכל צומת 4 קשתות ולכן 2 מהן יהיו אדומות ו-2 כחולות.
- בתחילת המעגל אנו צובעים את הצומת זו קשת אחת באדום מבלי לצבוע ישר קשת נוספת בכחול. עם זאת, הואיל ומספר הקשתות בגרף הוא זוגי (לכל צומת 4 קשתות), כאשר נחזור לצומת זו בסוף המעגל, קשת הכניסה תצבע בהכרח בכחול. מכאן, שגם בצומת הראשונה נשמר מאזן הצבעים.

<u>ניתוח סיבוכיות</u>

- מציאת מעגל אוילר - $O(|E|)$ (הוכחנו בכיתה).
- סריקת המעגל - במעגל אוילר אנו עוברים על כל קשת פעם אחת בדיוק - $O(|E|)$

סה"כ סיבוכיות זמן ריצה - $O(|E|)$.

4. גרף $K_{m,n}$ עם $m+n$ קודקודים: $v_1,\dots,v_m$, $w_1,\dots,w_n$
כל אחד מהקודקודים v מחובר ל n קודקודים מסוג w. כל אחד מהקודקודים מסוג w מחובר ל- m קודקודים מסוג v.

א. עבור אילו ערכים של m ו- n קיים מעגל אויילר?

ב. עבור אילו ערכים קיים מסלול אויילר?

<u>פתרון:</u>

א. כדי שיהיה מעגל אויילר, לכל צומת צריכה להיות דרגה זוגית, היות ולכל קודקוד ב- w יש m קשתות, על m להיות זוגי. מאותה סיבה גם על n להיות זוגי:

$m,n \in \mathbb{N}_{even}$

ב. כדי שיהיה מסלול אויילר אך לא מעגל, צריך של-2 צמתים <u>בלבד</u> תהיה דרגה אי זוגית. היות וכל הצמתים מקבוצה V שותה הדרגה (n) וכן כל הצמתים ב-W בעלי אותה דרגה (m), על m <u>או</u> n להיות שווה ל-2 כדי של-2 הצמתים האלו תהיה דרגה אי זוגית, על המשתנה השני להיות עם ערך אי זוגי.

סה"כ נקבל גרף עם 2 צמתים בעלי דרגה אי זוגית ושאר הצמתים בגרף בעלי דרגה זוגית (דרגת הצמתים תהיה 2).

$(m=2 \wedge n\in \mathbb{N}_{odd}) \vee (n=2 \wedge m \in \mathbb{N}_{odd})$.

נתון: קבוצה של אבני דומינו.

צ"ל: אלגוריתם יעיל הבודק אם ניתן לסדר אותן בשורה אחת באופן חוקי. אם כן - האלגוריתם מחזיר סידור כזה.

פתרון:

תיאור האלגוריתם:

תחילה, נייצג את אבני הדומינו כגרף. נגדיר גרף חדש ריק $G=(V,E)$ שייוצג ע"י רשימות שכנות. כמו כן, לכל צומת נוסיף שדה (פרט לרשימה המקושרת) והוא - דרגת הקודקוד. (עדכון השדה לא ישפיע על יעילות ההוספה כי בעת שרשור שכן ברשימה ניתן יהיה להגדיל את הערך ב-1 ב-$O(1)$).

בגרף החדש שיצרנו נגדיר 6 קודקודים עם המספרים 1-6. עתה (עבור כל אבני הדומינו) נוסיף קשתות בגרף עפ"י המרכיב של כל אבן (כך שכל אבן תיוצג ע"י קשת).

לאחר הוספת כל הקשתות נספור את מספר הקודקודים עם דרגה זוגית בגרף. אם מספר הקודקודים בגרף עם דרגה זוגית שונה מ-4 או 6, יוחזר "לא".

אחרת, אם מספר הקודקודים עם דרגה זוגית הוא 6, נפעיל את האלגוריתם שלמדנו בשיעור למציאת מעגל אוילר. המעגל שיוחזר ייצג את הסדר המתאים של האבנים. אם הכמות היא 4, נפעיל את האלגוריתם שצויין בשאלה 1 למציאת מסלול אוילר. במקרה זה, המסלול שיוחזר ייצג את הסידור המתאים.

הוכחת נכונות:

- הגרף שלנו מייצג את אבני הדומינו ע"י הקשתות. לכן, אם לא קיים מסלול/מעגל אוילר, לא נוכל לסדר את הקוביות באופן חוקי (כיוון שלבטח ישארו או יחסרו קוביות).
- אם קיים מסלול/מעגל אוילר, אנו יכולים לסדר את הקוביות עפ"י המסלול הזה. וכל קשת שקולה לקובית משחק, כיוון שהקשתות מחוברות ע"י ערכי הקצוות, אנו יכולים להיות בטוחים שסדר זה הוא סדר חוקי. כמו כן, כיוון שקיים מסלול/מעגל אוילר, (עובר על כל קשת בדיוק פעם אחת), לכן לא יהיו קשתות חסרות או מיותרות.
- נשים לב שגם במקרה וקיים מעגל אוילר (ולא רק מסלול) ניתן להתייחס אליו כמסלול. כמו כן, מעגלים הפנימיים כמסלול/מעגל ניתן "ליישר" כיוון שהקוביות מיוצגות ע"י קשתות.

זמן ריצה

- יצירת הגרף הריק והוספת שש הקודקודים - $O(1)$.
- הוספת הקשתות לגרף - $\underbrace{O(1)}_{\text{עלות הוספת קשת}} \times \underbrace{n}_{\text{קשתות}} = O(n)$
- סריקת "זוגיות" הדרגות (קיימים רק 6 צמתים) - $O(1)$.
- אלגוריתם למציאת הסידור - עפ"י אלגוריתם מציאת מעגל/מסלול אוילר - $O(|E|) = O(n)$

6. גרף לא מכוון פשוט יקרא "כמעט דו צדדי" אם הוא דו"צ או שקיימת קשת שהסרתה מהגרף תהפוך אותו לדו"צ. תאר אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V||E|)$ וממיין אם גרף הוא כמעט דו"צ.

<u>פתרון:</u>

<u>תאור האלגוריתם:</u>

תחילה נניח שהגרף קשיר, ניתן לבדוק הנחה זו ואם הגרף אינו קשיר, כדי שהגרף יהיה כמעט דו"צ אז כל רכיבי הקשירות (פרט למקסימום 1) להיות דו"צ. לכן, ניתן תמיד לבדוק עבור כל רכיב קשירות שהוא דו"צ ולאפשר רק ל-1 להיות כמעט דו"צ.

נריץ על הגרף BFS החל מקודקוד שרירותי s בתום ריצת ה-BFS נעבור על כל הקשתות בגרף ונבדוק האם קיימת קשת (u,w) שמחברת 2 צמתים מאותה רמה, אם לא, הגרף הוא דו"צ ולכן נחזיר T.

אם כן, נסתכל על המעגל האי-זוגי שנוצר $(u,\dots,s)$, $(w,\dots,s)$ ו- (u,w). נעבור על המעגל ובכל שלב ננסה להוריד אחת מהקשתות ולהריץ מחדש BFS. אם קיבלנו גרף שהוא דו"צ נחזיר T. אם בתום בדיקת כל הקשתות, עדיין לא קיבלנו גרף דו"צ נחזיר F.

<u>הוכחת נכונות:</u>

- כפי שהוכחנו בכיתה, אם לאחר ריצת BFS לא קיימת קשת המחברת 2 צמתים בעלי אותה דרגה, אזי לא קיים מעגל אי זוגי בגרף, כלומר הגרף הוא דו"צ (הנחנו שהגרף קשיר). לכן, אם לאחר ריצת ה-BFS הראשון, לא קיימת קשת כזו הגרף הוא אכן דו"צ.

- אם כן, מצאנו קשת כנ"ל, אזי נוצר מעגל אי זוגי. לכן, אם קיימת קשת שהורדתה תהפוך את הגרף לדו"צ היא חייבת להיות על המעגל הזה (כדי לשבור את המעגל האי זוגי). לכן, אם לא הצלחנו למצוא קשת על המעגל שהורדתה תהפוך את הגרף לדו"צ, נסיק כי לא קיימת קשת כזו בגרף.

<u>סיבוכיות זמן ריצה:</u>

① - ריצת ה-BFS הראשונה - $O(|E|+|V|) = O(|E|)$
הגרף קשיר ולכן $|E| \geq |V|-1$

- בדיקת כל הקשתות בגרף למציאת קשת המחברת 2 צמתים בעלי אותה דרגה - $O(|E|)$

סה"כ לריצת BFS ובדיקת הקשתות $O(|E|)$

② - הרצת BFS ובדיקה עבור כל אחת מהקשתות:

- אורך המעגל המקסימלי - $O(|V|)$

- בדיקת BFS עבור קשת בודדת (מ-①) - $O(|E|)$

סה"כ סיבוכיות האלגוריתם: $O(|E|\cdot|V|)$

מ"ש [illegible]

7. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון, ו-s קודקוד ב-V. קשת (v,u) תקרא מעגלית אם המרחק של u מ-s שווה למרחק של v מ-s.

א. תאר אלגוריתם לינארי שמוצא את כל הקשתות המעגליות ב-G.

ב. כמו א, כאשר לכל קודקוד יש רק 2 ביטים זכרון ואין לשמור מידע נוסף (ביניהם השדות שה-BFS מחזיק. לכן בניגוד לקודם ולהגיד ישומיה ה-BFS).

<u>פתרון:</u>

א. <u>תאור האלגוריתם:</u>

נריץ BFS החל מקודקוד s. ה-BFS יעדכן לכל קודקוד בגרף ערך מספרי $d[v]$ המציין את המרחק של הקודקוד מהשורש s. קודקודים ללא קשר ל-s, יקבלו את הערך ∞.

בסיום ריצת ה-BFS נעבור על רשימת הקשתות ועבור כל קשת נשווה בין ערכי $d[v]$ שלהן. אם הערכים שווים (ושונים מ-∞), נוסיף את הקשת לרשימת הקשתות המעגליות, אותה נחזיר בסיום האלגוריתם.

<u>הוכחת נכונות</u>

$d[u]=d[v]$

לאחר ריצת ה-BFS, לכל קודקוד מעודכן המרחק שלו מקודקוד השורש s. לכן, כל קשת המחברת 2 קודקודים בעלי אותו ערך $d[v]$ (השונה מאינסוף) היא קשת מעגלית.

כיוון שעברנו על כל הקשתות בגרף, כל הקשתות המעגליות יופיעו ברשימה שנחזיר.

<u>סיבוכיות זמן ריצה</u>

הרצת BFS החל מקודקוד s - $O(|E|+|V|)$

מעבר על כל הקשתות בגרף (בהנחת רשימת שכנות עבור כל קודקוד. עבור כל קודקוד נסרוק את רשימת הקודקודים השכנים. סה"כ נסרוק כל קודקוד פעם אחת וכל קשת פעמיים), בדיקה $[O(1)]$ והוספה לרשימת הקשתות המעגליות במידת הצורך $[O(1)]$. $O(|E|+|V|)$

סה"כ סיבוכיות זמן ריצה $O(|E|+|V|)$. ☒

ד. ב. <u>תאור האלגוריתם</u>

נניח שהגרף קשיר. אם לא, נוכל להריץ את האלגוריתם על כל אחד מרכיבי הקשירות.

נסמן את האינדקטורים הבאים לכל צומת:

done – האם סיימנו לטפל בצומת (מאותחל ל-0).

color – צבע הצומת (מאותחל ל-0).

נפעל בצורה דומה ל-BFS. לכל צומת v נסתכל על רשימת השכנים. עבור כל בן נבדוק האם done=1, אם כן, נבדוק האם color של צומת הבן שווה ל-color של v. אם כן, נוסיף את הקשת לרשימת הקשתות המעגליות.

אם done של הבן שווה ל-0, נוסיף את הצומת לתור, נעדכן את הערך של done להיות 1, ואת הערך של color בבן נעדכן להיות הערך ההפוך ל-color של v (כלומר, אם $Color[v]=0$ נשים 1 ולהפך).

כשהתור מתרוקן, נחזיר את רשימת הקשתות המעגליות.

<u>הוכחת נכונות</u>

כפי שהראינו בכיתה, ההפרש ברמות של צמתים שכנים ב-BFS המקורי הוא לכל היותר 1. לכן, אם ל-2 צמתים שכנים ערך color זהה, המשמעות היא שהם באותה רמה. מכאן, שכל הקשתות שיוחזרו הן אכן קשתות מעגליות.

לא יתכנו קשתות מעגליות נוספות פרט לאלו שברשימה כיוון שאם היו קיימות כאלו, האלגוריתם היה נתקל בכל אחת מהן בעת סריקת הגרף (הקשת מחברת 2 צמתים ולכן תיסרק פעמיים - עבור כל אחד מהבנים. כלומר, בפעם השניה שהקשת תסרק, הבן הראשון כבר נבדק ונצבע ביחס לצבע הצומת הבודק)

<u>סיבוכיות זמן ריצה</u>

האלגוריתם פועל בצורה דומה ל-BFS. נשים לב שכל הפעולות שהוספנו הן $O(1)$ לפעולה, לכן, סיבוכיות זמן הריצה לא תשתנה ותישאר $O(|E|+|V|)$.

8. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, תארו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V||E|)$ ומוצא מעגל מכוון קצר ביותר, אם קיים, ב-G.

פתרון:

תאור האלגוריתם:

(I) אם הגרף אינו קשיר, נריץ את האלגוריתם על כל רכיב קשירות בנפרד. לכן, נניח שהגרף קשיר.

(II) עבור כל אחד מהצמתים, נבצע את הצעדים הבאים:

① נריץ BFS החל מהצומת הנוכחי (נסמן ב-v).

② בתום ריצת ה-BFS נעבור על כל הקשתות הנכנסות ל-v ונשמור ב-v את הקשת המסומנת (u,v) כך של-u ערך d הנמוך ביותר מבין הקשתות.

(III) בתום ריצת הבדיקה על כל הצמתים, נסרוק את רשימת הצמתים ונחפש את הצומת עם הקשת המסומנת בעלת ערך d הקטן ביותר (מינימום של המינימומים), ונסמנה ב-m.

לסיום, נחזיר מעגל ע"י שימוש במצביעי π החל מצומת m וחזרה אליה.

הוכחת נכונות:

- נסמן ב-v את הצומת הנבדקת בכל אחת מהריצות של (II). כמו כן נסמן ב-(u,v) את הקשת הנכנסת ל-v. אם קיים בגרף מעגל המכיל את v ועובר דרך u, חייב להיות מסלול בין v ל-u. לכן, $d[u]$ ישמור את ערך המסלול המינימלי מ-v ל-u. מכאן, שהמעגל שנבחר ב-II② יהיה המעגל המכוון הקצר ביותר המתחיל ונגמר ב-v.

- כיוון שאנו עוברים על כל הצמתים, עבור כל צומת נסמן המעגל הקצר ביותר המתחיל ומסתיים בצומת הספציפי. לכן, "התאורה" ב-III במעגל המינימלי אכן תחזיר את המעגל הקצר ביותר בגרף. לא ייתכן מעגל קצר יותר שהחמצנו כיוון שאם כן, הוא היה מסומן באחד הצמתים.

ניתוח סיבוכיות זמן ריצה

עבור כל צומת $[O(|V|)]$

- הרצת BFS - $O(|E|+|V|) = O(|E|)$

הנחנו שהגרף קשיר ולכן $|E| \geq |V|-1$.

- סריקת כל הקשתות הנכנסות לצומת $O(|E|)$

סה"כ עבור חלק זה של האלגוריתם $O(|E| \cdot |V|)$

סריקת רשימת הצמתים ומציאת המעגל המינימלי - $O(|V|)$

החזרת המעגל ע"י שימוש במצביעי π - $O(|V|)$

9. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ו- s,t קדקודים ב- V. רוצים למצוא את גרף המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-t.

פתרון:

תאור האלגוריתם:

1. נריץ BFS החל מהקודקוד s. לאחר ריצת BFS נעבור על כל הקדקודים והקשתות ונעתיק לגרף G^* רק את הקדקודים שערך $d[v]$ שלהם קטן מאינסוף, וכן הקשתות המחברות 2 קדקודים בעלי ערך d הקטן מאינסוף.

2. בגרף G^*, אם $t \notin G^*$ נפסיק את האלגוריתם ונחזיר F כיוון של t- אין קשר ל-s כלל. אם $t \in G^*$, נעבור על כל הקשתות ב-G^* ונשנה את כיוונן. אחר כך, נריץ BFS החל מ-t. בתום ריצת BFS, נעבור על כל הקודקודים והקשתות ב-G^* ונעתיק לגרף G^{**} רק קודקודים שערך $d[v]$ שלהם קטן מאינסוף, וכן קשתות המחברות 2 קודקודים בעלי ערך d הקטן מאינסוף.

3. לסיום, נעבור על גרף G^{**}, נהפוך את כיוון כל הקשתות ונחזיר אותו.

הוכחת נכונות:

① $(u,v)\in G^{**} \Leftrightarrow (u,v)$ נמצא על מסלול הקצר ביותר מ-s ל-t.

$\Leftarrow$: $(u,v)\in G^{**} \Leftarrow$ ① בשלב הראשון ל-u ול-v היה ערך d הקטן מאינסוף, כלומר קיים מסלול הקצר ביותר מצומת s לצומת x העובר דרך u ו-v: $s,\ldots,u,v,\ldots,x$

② לאחר השלב השני ל-u ול-v גם היה ערך d הקטן מאינסוף, כלומר קיים גם מסלול הקצר ביותר מצומת t לצומת y העובר דרך u ו-v: $t,\ldots,v,u,\ldots,y$

③ מ-① ו-② נובע כי קיים גם מסלול בין s ל-t: העובר דרך u,v. מסלול זה הוא המסלול הקצר ביותר היות ובשלב הראשון $d(u)+1=d(v)$ ובשלב השני $d(v)+1=d(u)$. כלומר מסלול המורכב מ-2 תתי מסלולים הקצרים ביותר, הוא מסלול הקצר ביותר.

$\Rightarrow$: (u,v) נמצא על מסלול הקצר ביותר מ-s ל-t, כלומר קיים מסלול $s,\ldots,u,v,\ldots,t$ הקצר ביותר.

לכן, גם המסלול $s,\ldots,u,v$ הוא הקצר ביותר ומכאן שלאחר השלב הראשון, הקשת (u,v) הועתקה לגרף G^*.

בצורה דומה, המסלול $t,\ldots,v,u$ הוא הקצר ביותר ומכאן שלאחר השלב השני, הקשת (v,u) תועתק גם לגרף G^{**}.

(ב) $v \in G^{**}$ אמ"מ ערכי $d[v]$ היו קטנים מאינסוף לאחר שני השלבים. לכן,
בגרף G^{**} קיימת קשת (u,v) ב-G^{**}. ב-Ⓐ הוכחנו כי $(u,v) \in G^{**}$ אמ"מ
(u,v) נמצאת על מסלול קצר ביותר בין s ל-t. לכן, $v \in G^{**}$ אמ"מ הוא
במסלול קצר ביותר בין s ל-t.

<u>ניתוח סיבוכיות</u>

- הרצת BFS בשלב הראשון והשני - $2 \cdot O(|E|+|V|)$
- מעבר על כל הקודקודים ב-G לאחר כל BFS - $2O(|V|)$
- מעבר על כל הקשתות ב-G לאחר BFS $2O(|E|)$

(בדיקה והוספה במקרה הצורך הינן בעלות $O(1)$)

- מעבר על הקשתות בשלב האחרון ושינוי הצבע - $O(|E|)$

סה"כ סבוכיות האלגוריתם - $\underline{O(|E|+|V|)}$.