כל מטריצה ניתן לפרק לפירוק $A=LU$ כך ש L ו-U הן מטריצות משולשות עליונה ותחתונה. $\boxed{\diagdown}\cdot\boxed{\diagdown}$. עלות הפירוק הנו $O(n^3)$.

בהינתן מספר מערכות משוואות $\{A\cdot x_k=b_k\}_{k=1}^{N_s}$ $(A_{N\times N})$ ניתן למצוא את המטריצה ההופכית של A פעם אחת ואז לחשב עבור כל מערכת כפל מטריצה בו.

במקרה כזה, עלות היא $O(\underset{\text{מציאת } A^{-1}}{N^3}+\underset{\text{מציאת פתרון לכל משוואה}}{N^2\cdot N_s})$.

לא נוסח בהגדרה LU, פירוק המטריצה עולה $O(N^3)$ והחישוב עולה עד"י $N_s\cdot N^2$, סה"כ קיבלנו גם כאן אותה סיבוכיות תאורטית (שים לב שבאופן מעשי מציאת A^{-1} מהיר יותר אך קיימת לה בעיית יציבות).

לדוגמא, אם $N=10^2$, $N_s=10^4$ אזי עלות כי $N^3=10^6$ וסה"כ
$\text{Total}=10^6+10^8$ (תוך התעלמות מקבועים).

פירוק LU

בשיטת הדירוג של גאוס אנחנו הופכים את $[A|b]$ ל- $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ באמצעות פעולה מהצורה $r_i\to r_i+\alpha r_j$.

ניתן את $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ לכתוב גם כך: $[\tilde{A}|\tilde{b}]=J_1[A|b]$ כך ש J למעשה מסמל את הפעולה שביצענו.

למשל, עבור הפעולה $r_2\leftarrow r_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}r_1$ מתאימה המטריצה

$$J_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0\\ & & \ddots \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

כלומר, הפכנו את פעולת הדירוג לפעולות כפל מטריצות.

לאחר מספיק הכפלות (q פעמים) המטריצה המדורגת $\underbrace{J_q\cdots J_2\cdot J_1}_{L^{-1}}[A|b]=[\hat{A}|\hat{b}]$

מט' J הן משולשות תחתונות ולכן L^{-1} היא מט' משולשת תחתונה, כאשר $L=(J_q\cdots J_1)^{-1}=J_1^{-1}\cdots J_q^{-1}$. ובסמן את U נסמן להיות $\hat{A}$. כלומר קיבלנו ש- $A=L\hat{A}=LU$.

דוגמא:

נתון: $A=\begin{pmatrix}1 & \frac12 & \frac13\\ \frac12 & \frac13 & \frac14\\ \frac13 & \frac14 & \frac15\end{pmatrix}$. רוצים למצוא את הפירוק של המטריצה.

$$L_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac12&1&0\\-\frac13&0&1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\0&\frac1{12}&\frac1{12}\\0&\frac1{12}&\frac4{45}\end{pmatrix}\Rightarrow L_2\cdot(L_1A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot(L_1A)=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\0&\frac1{12}&\frac1{12}\\0&0&\frac1{180}\end{pmatrix}$$

וסיימנו את שלב הדירוג. נותר לנו להפוך את L_1 ואת L_2.

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פשוט הופכים את הסימן של מה שמתחת לאלכסון.

נמצא את L:

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו את הפירוק.

/* לאחר מציאת הפירוק $Ax = L\underline{Ux} = b$ אנו פותרים את הבעיה ב-2 שלבים פשוטים יותר $Lc = b$, $Ux = c$ */

<u>דוגמה נוספת (יותר קשה)</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

נוצר 0 במקום בו אנו רוצים 1.

המסקנה היא שחייבים גם פיבוט שורות

<u>נשים לב:</u>

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

* אנו עושים את השלב הזה קודם כדי להעביר את האיבר הגדול ביותר במודול להיות בשורה שאנו מטפלים בה. ועכשיו ממשיכים כרגיל:

$$L_1 (P_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} (P_1 A) = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 12/7 & 17/7 \\ 0 & 6/7 & 12/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots\ldots$$

בסוף התהליך נקבל מטריצה מדורגת $L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$ (שמונה מטריצות זה מגעיל) 3x3 אבל זה מתאים באופן כללי לכל מט' ריבועית).

את הצורה הזו נוכל להעביר לצורה $PA = LU$ כאשר P היא מטריצת תמורה של שורות של A. כך נוכל להגיד כי $PAx = Pb$ שקול למשוואה המקורית.

כדי למצוא את המט' נגדיר:

$$\tilde{L}_2 = L_2$$

$$\tilde{L}_1 = P_2 L_1 P_2^{-1}$$

ונקבל:

$$\underbrace{\tilde{L}_2 \cdot \tilde{L}_1}_{L^{-1}} \underbrace{P_2 \cdot P_1}_{P} = L_2 P_2 L_1 \cancel{P_2^{-1}} \cancel{P_2} P_1 = L_2 P_2 L_1 P_1 \Rightarrow$$

קיבלנו את המטריצה המקורית ולכן ניתן להשתמש בפירוק זה.

פירוק QR

$A=QR$ כאשר Q מט' אורתונורמלית ו- R היא משולשת עליונה.

אני מנסה לבנות בסיס אורתוגונלי מהעמודות של A. נניח ש- $A=(a_1|a_2|\dots|a_n)$

אנחנו קודם מוצאים בסיס אורתוגונלי ולאחר מכן ננרמל אותו לבסיס אורתונורמלי.

<u>אורתוגונלי</u> <u>אורתונורמלי</u>

$u_1 = a_1 \Rightarrow e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

$u_2 = a_2 - \frac{\langle e_1, a_2\rangle}{\underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{1}} e_1 \Rightarrow e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$u_3 = a_3 - \langle e_1, a_3\rangle e_1 - \langle e_2, a_3\rangle e_2 \dots$

ובאופן כללי,

$u_n = a_n - \sum \langle e_i, a_n\rangle e_i$

<u>למה זה עובד?</u>

$\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, a_2 - \langle e_1, a_2\rangle e_1\rangle = \langle u_1, a_2\rangle - \langle u_1, \underbrace{\langle e_1, a_2\rangle}_{\text{מספר}} e_1\rangle$

$= \langle u_1, a_2\rangle - \langle e_1, a_2\rangle\langle u_1, e_1\rangle = \langle u_1, a_2\rangle - \langle u_1, a_2\rangle \cdot \frac{\langle u_1, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} = 0$

ולכן הם אורתוגונלים.

<u>מציאת R:</u>

Q אורתו' $\Rightarrow Q^T = Q^{-1}$

$Q \underbrace{Q^T A}_{R} = A$