

1

הקדמה

$$P(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t)$$

לפתור את המשוואה

בהינתן פונקציות P, q, r, g המוגדרות בקטע $[a, b]$ ו- $P(t) \neq 0$ לכל $t \in [a, b]$.

$$P(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$$

$$(1) \quad y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad W(y_1, y_2) \neq 0$$

נניח שיש לנו שתי פונקציות y_1, y_2 המוגדרות בקטע $[a, b]$ ו- $W(y_1, y_2) \neq 0$ לכל $t \in [a, b]$. אז הן מהוות בסיס לרשת הפתרונות הומוגניים.

$$y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

נניח שיש לנו פונקציות u_1, u_2 המוגדרות בקטע $[a, b]$ ו- $u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$ לכל $t \in [a, b]$.

$$y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \quad (2)$$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

אנחנו רוצים למצוא פונקציות u_1, u_2 שיהיו פתרון למשוואה (2) ו- $u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$.

$$(2) \quad u_1 y_1' + u_2 y_2' = g(t)$$

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

נציב את (2) ו-(3) במשוואה (1).

$$P(t) [u_1 y_1' + u_2 y_2'] + q(t) (u_1 y_1 + u_2 y_2) + r(t) (u_1 y_1 + u_2 y_2) = g(t) \quad (3)$$

$$(3) \quad (P(t) y_1'' + q(t) y_1' + r(t) y_1) u_1 + (P(t) y_2'' + q(t) y_2' + r(t) y_2) u_2 + P(t) (u_1 y_1' + u_2 y_2') = g(t)$$

= 0 לפי משוואת הומוגניות

נניח $u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$

$$\begin{cases} u_1 y_1' + u_2 y_2' = \frac{g(t)}{P(t)} \\ u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{משוואות})$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

אז $u_2' = -1 u_1'$ (אם $u_1' \neq 0$)

$$u_1' = \frac{-y_2 \cdot \frac{g(t)}{P(t)}}{W}$$

$$u_2' = \frac{y_1 \cdot \frac{g(t)}{P(t)}}{W}$$

דוגמה

$$y'' + 9y = 3t \sin 3t$$

$$y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$$

הפונקציות y_1, y_2 הן $\sin 3t, \cos 3t$

$$y_p = u_1(t) \sin 3t + u_2(t) \cos 3t$$

$$y_1 = \sin 3t \quad y_2 = \cos 3t$$

אנחנו רוצים למצוא פונקציות u_1, u_2 שיהיו פתרון למשוואה (2) ו- $u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$.

$$P(t) = 1 \quad g(t) = 3t \sin 3t$$

$$W = \begin{vmatrix} \sin 3t & \cos 3t \\ 3 \cos 3t & -3 \sin 3t \end{vmatrix} = -3(\sin^2 3t + \cos^2 3t) = -3 \neq 0$$

הקריטריון הנדרש

$$u_1' = \frac{\cos 3t \cdot t \cdot 3t}{t^2} = \sin 3t \Rightarrow \boxed{u_1 = -\frac{1}{3} \cos 3t} \quad \text{+C עבור אינטגרל}$$

$$u_2' = \frac{\sin 3t \cdot t \cdot 3t}{-t^2} = -\frac{\sin^2 3t}{\cos 3t} \Rightarrow u_2 = \int -\frac{\sin^2 3t}{\cos 3t} dt = -\int \frac{1 - \cos^2 3t}{\cos 3t} dt$$

$$= -\int \frac{dt}{\cos 3t} + \int \cos 3t dt = -\int \frac{dt}{\cos 3t} + \frac{\sin 3t}{3}$$

$$\text{(א)} \int \frac{dt}{\cos 3t} = \int \frac{\cos 3t dt}{\cos^2 3t} = \frac{1}{3} \int \frac{d \sin 3t}{1 - \sin^2 3t}$$

$$= \left| x = \sin 3t \right| = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{6} \left[\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x} \right]$$

$$= \frac{1}{6} [-\ln|1-x| + \ln|1+x|] = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin 3t}{1 - \sin 3t} \right|$$

$$y_p = -\frac{1}{3} \cos 3t \cdot \sin 3t + \left(-\frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin 3t}{1 - \sin 3t} \right| + \frac{\sin 3t}{3} \right) \cos 3t$$

$$= -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin 3t}{1 - \sin 3t} \right| \cdot \cos 3t$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin 3t}{1 - \sin 3t} \right| \cos 3t + C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t}$$