

(1) (6)

$$2x'' + 5x' + 3x = 0$$

$$x(0) = 0, x'(0) = -4$$

$$x''(t) = r^2 e^{rt} \Leftrightarrow x'(t) = r e^{rt} \Leftrightarrow x(t) = e^{rt} \quad \text{נסבם פתרון אחר}$$

$$2r^2 e^{rt} + 5r e^{rt} + 3e^{rt} = 0 \quad | : e^{rt}$$

$$2r^2 + 5r + 3 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{4} = \begin{cases} r_1 = -\frac{3}{2} \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

לכן  $x_2(t) = e^{-t}$ ,  $x_1(t) = e^{-\frac{3}{2}t}$  הם הפתרונות הבסיסיים

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 e^{-t}$$

נמצא את המשוואות

$$\begin{cases} x(0) = C_1 e^{-\frac{3}{2} \cdot 0} + C_2 e^{-0} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \\ x'(0) = -\frac{3}{2} C_1 e^{-\frac{3}{2} \cdot 0} - C_2 e^{-0} = -4 \Rightarrow -\frac{3}{2} C_1 - C_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} C_2 = -4 \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -8 \\ C_1 = 8 \end{cases}$$

$$x(t) = 8e^{-\frac{3}{2}t} - 8e^{-t}$$

הפתרון הסופי

(7)  $4x'' - 4x' + x = 0$ ;  $x(0) = 0$   $x'(0) = -1.5$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{המשוואה האופיינית}$$

לכן  $x_2(t) = t e^{\frac{1}{2}t}$ ,  $x_1(t) = e^{\frac{1}{2}t}$  הם הפתרונות הבסיסיים

$$x(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 t e^{\frac{1}{2}t}$$

נמצא את המשוואות

$$x(0) = C_1 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$x'(0) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + C_2 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + \frac{1}{2} C_2 \cdot 0 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -1.5$$

$$\frac{1}{2} C_1 + C_2 = -1.5 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 + C_2 = -1.5 \Rightarrow C_2 = -1.5$$

$$x(t) = -1.5 \cdot t \cdot e^{\frac{1}{2}t}$$

הפתרון הסופי

1. (ג)

$$x'' + 16x = 0$$

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3 \quad x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

המשוואה הליניארית

$$r^2 + 16 = 0$$

$$r^2 = -16$$

$$r = \pm 4i$$

$$x(t) = C_1 e^{0t} \cdot \cos(4t) + C_2 e^{0t} \sin(4t)$$

פסגה הכללית

הצבה לתנאי ההתאמה

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1 \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -3$$

$$C_1 \cos(\pi) + C_2 \sin(\pi) = -3 \Rightarrow \boxed{C_1 = 3}$$

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -C_1 \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot 4 + C_2 \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot 4 = 4$$

$$4C_2 = 4 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$$

$$x(t) = 3 \cos(4t) - \sin(4t)$$

הפתרון הסופי

2. (ב)

$$x'' + 4x' + 13x = 0$$

$$x(0) = 2$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

המשוואה הליניארית

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

פסגה הכללית

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t)$$

הצבה לתנאי ההתאמה

$$x(0) = C_1 e^0 \cos(0) + C_2 e^0 \sin(0) = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 2}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{-\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + C_2 e^{-\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = -e^\pi}$$

$$x(t) = 2 \cdot e^{-2t} \cos(3t) - e^{-2t+\pi} \sin(3t)$$

הפתרון הסופי

2. (k)  $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$

המשוואה האופיינית

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} r^2 - r - 2 \\ r^3 - 2r^2 - r + 2 \quad | \quad r - 1 \\ \hline r^3 - r^2 \\ \hline -r^2 - r + 2 \\ -r^2 + r \\ \hline -2r + 2 \\ -2r + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r - 2 \\ r^2 - r - 2 \quad | \quad r + 1 \\ \hline r^2 - r \\ \hline -2r - 2 \\ -2r - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

הצורה הכללית

$$(r+1)(r-1)(r-2) = 0$$

לכן

הפתרון הכללי הוא  $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 2$

לכן

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t \\ x_2(t) &= e^{-t} \\ x_3(t) &= e^{2t} \end{aligned}$$

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

לכן

(g)  $x^{(4)} - 4x'' + 16x' + 32x = 0$

המשוואה האופיינית

$$r^4 - 4r^2 + 16r + 32 = 0$$

$$\begin{array}{r} r^3 - 2r^2 + 16 \\ r^4 - 4r^2 + 16r + 32 \quad | \quad r + 2 \\ \hline r^4 + 2r^3 \\ \hline -2r^3 - 4r^2 + 16r + 32 \\ -2r^3 - 4r^2 \\ \hline 16r + 32 \\ 16r + 32 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} r^2 - 4r + 8 \\ r^3 - 2r^2 + 16 \quad | \quad r + 2 \\ \hline r^3 + 2r^2 \\ \hline -4r^2 + 16 \\ -4r^2 - 8r \\ \hline 8r + 16 \\ 8r + 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

הצורה הכללית

$$(r+2)^2 (r^2 - 4r + 8) = 0$$

לכן

$$r_{1,2} = -2$$

$$r_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i$$

לכן

$$x_1(t) = e^{-2t} \quad x_2(t) = t \cdot e^{-2t}$$

$$x_3(t) = e^{2t} \cos(2t) \quad x_4(t) = e^{2t} \sin(2t)$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + c_3 e^{2t} \cos(2t) + c_4 e^{2t} \sin(2t)$$

לכן

2. (2)

$$x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$$

$$r^4 - 5r^2 + 4 = 0$$

$$\frac{r^3 + 2r^2 - r - 2}{r^4 - 5r^2 + 4} \cdot r - 2$$

$$\frac{r^4 - 2r^3}{r^4 - 5r^2 + 4}$$

$$+ 2r^3 - 5r^2 + 4$$

$$\frac{2r^3 - 4r^2}{2r^3 - 5r^2 + 4}$$

$$-r^2 + 4$$

$$-r^2 + 2r$$

$$-2r + 4$$

$$-2r + 4$$

$$0$$

$$\frac{r^2 + 3r + 2}{r^3 + 2r^2 - r - 2} \cdot r - 1$$

$$r^3 - r^2$$

$$3r^2 - r - 2$$

$$3r^2 - 3r$$

$$2r - 2$$

$$2r - 2$$

$$0$$

הצגת הפתרונות

הצגת הפתרונות

$$(r-2)(r-1)(r+2)(r+1) = 0$$

, 1, 2, 3

$$x_1(t) = e^{-t}$$

$$x_2(t) = e^t$$

$$x_3(t) = e^{-2t}$$

$$x_4(t) = e^{2t}$$

הצגת הפתרונות

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t}$$

הצגת הפתרונות

(3)

$$x^{(5)} - 6x^{(4)} + 9x^{(3)} = 0$$

$$r^5 - 6r^4 + 9r^3 = 0$$

$$r^3(r^2 - 6r + 9) = 0$$

$$r^3(r-3) = 0$$

הצגת הפתרונות

$$r_1 = 3, -3, r_{2,3} = 0$$

הצגת הפתרונות

$$x_1(t) = e^{0t} = 1$$

$$x_2(t) = x \cdot e^{0t} = x$$

$$x_3(t) = x^2 e^{0t} = x^2$$

$$x_4(t) = e^{3t}$$

$$x_5(t) = e^{-3t}$$

הצגת הפתרונות

$$x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{3t} + c_5 e^{-3t}$$

21

$$3. (a) \quad x'' + x' = 3 \sin t \quad x(0) + x'(0) = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$r^2 + r = 0 \\ r(r+1) = 0 \\ r_1 = 0 \quad r_2 = -1$$

הצורה הכללית של הפתרון הומוגני היא  $e^{0t}$  ו- $e^{-t}$ .

$$x_h(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-t} = c_1 + c_2 e^{-t}$$

הצורה הכללית של הפתרון הומוגני היא  $e^{0t}$  ו- $e^{-t}$ .

$S = 0 \pm i$  או  $\alpha + \beta i = 0 + i = i$  , הריבוי III ,  $\sin t$  ו- $\cos t$  הם פתרונות בסיסיים של המשוואה הומוגנית.

$$x_p(t) = t^0 e^{0t} [c_3 \cos t + c_4 \sin t] = c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

$$x_p'(t) = c_3(-\sin t) + c_4 \cos t = c_4 \cos t - c_3 \sin t$$

$$x_p''(t) = -c_4 \sin t - c_3 \cos t$$

$$-c_4 \sin t - c_3 \cos t + c_4 \cos t - c_3 \sin t = 3 \sin t$$

השוואת מקדמים:

$$(c_4 - c_3) \cos t + (-c_4 - c_3) \sin t = 3 \sin t$$

$$\left. \begin{aligned} c_4 - c_3 = 0 &\Rightarrow c_4 = c_3 \\ -c_4 - c_3 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2c_3 = 3 \Rightarrow c_3 = -\frac{3}{2} = c_4$$

$$x_p(t) = -\frac{3}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t$$

פתרון פרטי:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} - \frac{3}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t$$

פתרון הכולל:

$$x'(t) = -c_2 e^{-t} + \frac{3}{2} \sin t - \frac{3}{2} \cos t$$

$$x(0) + x'(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{2} - c_2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow c_1 = 3$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2} - c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

הפתרון הסופי הוא  $x(t) = 3 - \frac{3}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t$ .

12

$$3. (a) \quad x'' + x = t \cdot e^t + 2e^{-t}$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

המשוואה הומוגנית היא  $x'' + x = 0$  והפתרון הכללי שלה הוא  $x_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$

$$X(t) = C_1 e^{0t} \cdot \cos(1t) + C_2 e^{0t} \cdot \sin(1t)$$

הפתרון הכללי הוא  $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + x_p(t)$

$$x_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$



הפתרון הכללי הוא  $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + x_p(t)$

$$(1) \quad x_{p1}'' + y_{p1} = t \cdot e^t$$

$$(2) \quad x_{p2}'' + y_{p2} = 2e^{-t}$$

הפתרון

הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית הוא  $x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$$x_{p1} = t^0 e^{1 \cdot t} (A_1 t + b_1) = e^t (A_1 t + b_1) = A_1 e^t t + b_1 e^t$$

$$x_{p2} = t^0 e^{-t} \cdot b_2 = b_2 e^{-t}$$

$$x_{p1}' = A_1 e^t t + A_1 e^t \cdot 1 + b_1 e^t = A_1 e^t t + A_1 e^t + b_1 e^t$$

$$x_{p1}'' = A_1 e^t t + A_1 e^t \cdot 1 + A_1 e^t + b_1 e^t = A_1 e^t t + 2A_1 e^t + b_1 e^t$$

$$x_{p2}' = b_2 (-1) e^{-t} = -b_2 e^{-t}$$

$$x_{p2}'' = b_2 e^{-t}$$

הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית הוא  $x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$$A_1 e^t t + 2A_1 e^t + b_1 e^t + A_1 e^t t + b_1 e^t = t \cdot e^t$$

$$2A_1 e^t t + (2A_1 + 2b_1) e^t = t \cdot e^t \Rightarrow 2A_1 = 1 \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{1}{2}}$$

$$2A_1 + 2b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$x_{p1} = \frac{1}{2} e^t t - \frac{1}{2} e^t$$



הפתרון

$$b_2 e^{-t} + b_2 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow 2b_2 e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \boxed{b_2 = 1}$$

הפתרון (2)

$$x_{p2} = e^{-t}$$

הפתרון



3. (d)  $x'' + x' = 4t \sin t$

למצוא את הפתרון הכללי, נחפש פתרון הומוגני ראשון (H.N)

$$\begin{aligned} r^2 + r &= 0 \\ r(r+1) &= 0 \\ r_1 &= 0 \quad r_2 = -1 \end{aligned}$$

$$X_h(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-1 \cdot t}$$

$$\boxed{X_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t}}$$



( $s=0$  פה 0 "ה" 0 + i -  $\delta$ ) : מציאת פתרון פרטי של  $g(x)$  III נמצא את  $g(x)$

$$X_p = t^0 e^{0t} [(A_1 t + b_1) \cos t + (A_2 t + b_2) \sin t]$$

$$X_p = A_1 t \cos t + b_1 \cos t + A_2 t \sin t + b_2 \sin t$$

$$X_p' = A_1 \cos t + A_1 (-\sin t) \cdot t + b_1 (-\sin t) + A_2 \sin t + A_2 t \cos t + b_2 \cos t$$

$$= A_1 \cos t - A_1 t \sin t - b_1 \sin t + A_2 \sin t + A_2 t \cos t + b_2 \cos t$$

$$= A_2 t \cos t + (A_1 + b_2) \cos t - A_1 t \sin t + (A_2 - b_1) \sin t$$

$$X_p'' = A_2 \cos t + A_2 t (-\sin t) + (A_1 + b_2) (-\sin t) - A_1 \sin t - A_1 t \cos t + (A_2 - b_1) \cos t$$

$$= -A_1 t \cos t + (2A_2 - b_1) \cos t - A_2 t \sin t - (2A_1 + b_2) \sin t$$

נשווה

$$(A_2 - A_1) t \cos t + (2A_2 + A_1 + b_2 - b_1) \cos t + (-A_1 - A_2) t \sin t + (A_2 - b_1 - 2A_1 - b_2) \sin t = 4t \sin t$$

①  $A_2 - A_1 = 0 \Rightarrow A_2 = A_1$

③  $2A_2 + A_1 + b_2 - b_1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-2) + b_2 - b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = b_1 + 6$

②  $-A_1 - A_2 = 4 \Rightarrow -A_1 - A_1 = 4 \Rightarrow \boxed{A_1 = -2 = A_2}$

④  $A_2 - b_1 - 2A_1 - b_2 = 0 \Rightarrow -2 - b_1 + 4 - b_1 - 6 = 0 \Rightarrow -2b_1 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -2} \Rightarrow \boxed{b_2 = 4}$

$$\boxed{X_p(t) = -2t \cos t - 2 \cos t - 2t \sin t + 4 \sin t}$$

הפתרון הכללי:

$$\boxed{X(t) = c_1 + c_2 e^{-t} - 2t \cos t - 2 \cos t - 2t \sin t + 4 \sin t}$$

הפתרון הכללי:



3. (3)  $x'' - 2x' + x = (t-3)e^t \Rightarrow x'' - 2x' + x = te^t - 3e^t$

הצגת המשוואה כצורה של  $x'' + p(x)x' + q(x)x = g(x)$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1$$

$$X_h(t) = c_1 e^t + c_2 t \cdot e^t$$

לכן, הפתרונות הומוגניים הינם:

(1)  $x_{p_1}'' - 2x_{p_1}' + x_{p_1} = te^t$

נניח כי הפתרון הוא בצורה  $te^{at}$  (כאן  $a=1$ )

(2)  $x_{p_2}'' - 2x_{p_2}' + x_{p_2} = -3e^t$

נניח כי הפתרון הוא בצורה  $g(x)$  (כאן  $g(x) = b_2 e^{at}$ )

$$x_{p_1} = t^2 e^t \cdot (A_1 t + b_1) = A_1 t^3 e^t + b_1 t^2 e^t$$

$$x_{p_2} = t^2 e^t \cdot b_2$$

$$x_{p_1}' = A_1 3t^2 e^t + A_1 t^3 e^t + b_1 2te^t + b_1 t^2 e^t = A_1 t^3 e^t + (3A_1 + b_1)t^2 e^t + 2b_1 t e^t$$

$$x_{p_1}'' = A_1 6te^t + A_1 3t^2 e^t + A_1 3t^2 e^t + A_1 t^3 e^t + b_1 2e^t + b_1 2te^t + b_1 2te^t + b_1 t^2 e^t$$

$$= A_1 t^3 e^t + (6A_1 + b_1)t^2 e^t + (6A_1 + 4b_1)te^t + 2b_1 e^t$$

$$x_{p_2}' = b_2 2te^t + t^2 e^t \cdot b_2$$

$$x_{p_2}'' = 2b_2 e^t + 2b_2 te^t + 2te^t b_2 + t^2 e^t b_2$$

$$= b_2 t^2 e^t + 4b_2 te^t + 2b_2 e^t$$

נציב את הפתרונות הנניחים למשוואה (1) ונשווה מקדמים:

$$A_1 t^3 e^t + (6A_1 + b_1)t^2 e^t + (6A_1 + 4b_1)te^t + 2b_1 e^t - 2A_1 t^3 e^t - 2(3A_1 + b_1)t^2 e^t - 4b_1 te^t + A_1 t^3 e^t + b_1 t^2 e^t = te^t$$

$$6A_1 te^t + 2b_1 e^t = te^t \Rightarrow \begin{cases} 6A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{6} \\ 2b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_{p_1} = \frac{1}{6} t^3 e^t$$

אוקיי

נציב את הפתרונות הנניחים למשוואה (2) ונשווה מקדמים:

$$b_2 t^2 e^t + 4b_2 te^t + 2b_2 e^t - 4b_2 te^t - 2t^2 e^t b_2 + t^2 e^t b_2 = -3e^t$$

$$2b_2 e^t = -3e^t \Rightarrow 2b_2 = -3 \Rightarrow b_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x_{p_2} = -\frac{3}{2} t^2 e^t$$

אוקיי

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t - \frac{3}{2} t^2 e^t$$

$$C \text{ כולל } f_1, \dots, f_n \Leftrightarrow \mathbb{R} \text{ כולל } f_1, \dots, f_n \quad 4$$

הוכחה:

( $\Rightarrow$ ) עניינה של הוכחה זו היא להראות כי אם  $f_1, \dots, f_n \in C$  אז  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ .  
 נניח שיש  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  כאלה שאם  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$  אז  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .  
 נניח שיש  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  כאלה שאם  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$  אז  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .  
 נניח שיש  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  כאלה שאם  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$  אז  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) נניח שיש  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$  ונניח שיש  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  כאלה שאם  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$  אז  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .  
 נניח שיש  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  כאלה שאם  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$  אז  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$$

$$c_i = a_i + ib_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$(a_1 + ib_1) f_1 + (a_2 + ib_2) f_2 + \dots + (a_n + ib_n) f_n = 0$$

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n) + (b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_n f_n) i = 0$$

כלומר,  $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$  ו-  $b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_n f_n = 0$ .  
 מכאן,  $a_1 = \dots = a_n = 0$  ו-  $b_1 = \dots = b_n = 0$ .  
 כלומר,  $c_1 = \dots = c_n = 0$ .

$$(1) \quad a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$$

שם זה שקיבלנו

$$(2) \quad b_1 f_1 + \dots + b_n f_n = 0$$

ההקדמות באפיון את ההמשיות (1) או (2), שנים כאלה הם  
 ולכן קיבלנו כי קיימים מקדמים  $a_1, \dots, a_n$  או  $b_1, \dots, b_n$  כאלה שאם  
 $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$  או  $b_1 f_1 + \dots + b_n f_n = 0$  אז  $a_1 = \dots = a_n = 0$  או  $b_1 = \dots = b_n = 0$ .

לפיכך קיבלנו ש-  $f_1, \dots, f_n$  חייבים להיות  $\in \mathbb{R}$  בסתירה  
 שנתנה ההקדמות.

לפיכך

