סיכום נקודות בלוגיקה

תזכורות ממתמטיקה בדידה

מיו μ – קשר $(\mu n.A)$ שמשמעותו ה-n הטבעי הראשון שמקיים את A.

איוטה ι – קשר $(\iota x.A)$ שמשמעותו ה-x היחיד המקיים את A.

$A\Delta B$ (ההפרש הסימטרי) – כל האיברים שנמצאים בדיוק באחת מהקבוצות A ו-B.

ניתן להתייחס ל**פונקציה** כיחס המקיים תנאי החד-ערכיות: $\forall a\forall b_1\forall b_2.<a,b_1>\in f\wedge<a,b_2>\in f\rightarrow b_1=b_2$.
פונקציה חלקית מ-A ל-B היא יחס מ-A ל-B המקיים את תנאי החד-ערכיות הנ"ל.
פונקציה מ-A ל-B היא פונקציה חלקית f מ-A ל-B המקיימת:
$\forall a\in A\exists b\in B.<a,b>\in f$.

אם R הוא יחס, אז **היחס ההפוך** R^{-1} מוגדר ע"י
$R^{-1}=\{<b,a>\mid<a,b>\in R\}$.

הרכבה של יחסים $R\circ S$ המוגדרת
$R\circ S=\{<a,c>\in AxC\mid\exists b\in B.<a,b>\in S\wedge<b,c>\in R\}$.

יחס R על קבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם $\forall x\in A.xRx$.
יחס R נקרא **אי רפלקסיבי** אם $\forall x.^{-}(xRx)$.
אם מתקיים $\forall x\in A.^{-}(xRx)$, היחס נקרא אי רפלקסיבי על A.

יחס R נקרא **טרנסיטיבי** אם $\forall x\forall y\forall z.xRy\wedge yRz\rightarrow xRz$.

יחס R נקרא **סימטרי** אם $\forall x\forall y.xRy\rightarrow yRx$,
אנטי סימטרי חזק אם $\forall x\forall y.xRy\rightarrow^{-}(yRx)$
ואנטי סימטרי (חלש) אם $\forall x\forall y.xRy\wedge yRx\rightarrow x=y$.

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי** על A אם הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.
יחס סדר חלקי יקרא **מלא** על A אם מתקיים גם כי $\forall x\in A\forall y\in A.xRy\vee yRx$.

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי חזק** על A אם הוא טרנסיטיבי ואי רפלקסיבי על A.
יחס כזה יקרא **מלא** על A אם מתקיים $\forall x\in A\forall y\in A.xRy\vee yRx\vee x=y$.

יחס R יקרא **שקילות** על A אם הוא רפלקסיבי על A, סימטרי וטרנזיטיבי.
אם R הוא יחס שקילות, **מחלקת השקילות** של x לפי R היא $[x]_R=\{y\in A|xRy\}$.
אם R יחס שקילות על A, **קבוצת המנה** של R על A היא $A/R=\{[x]_R|x\in A\}$.

R יחס סדר על A. ההגדרות יחסית ל-A.
רפלקסיבי $\forall a\in A.aRa$ **אי רפלקסיבי** $\forall a\in A.^{-}(aRa)$
סימטרי $\forall$ **אנטי סימטרי** $\forall$ **אנטי סימטרי חזק** $\forall$
טרנסיטיבי $\forall$
יחס סדר חלקי R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי **יחס סדר מלא** R יחס סדר חלקי ובנוסף מתקיים $\forall$ **יחס סדר חלקי חזק** R אי רפלקסיבי וטרנסיטיבי **יחס סדר מלא חזק** R יחס סדר חלקי חזק ובנוסף מתקיים $\forall$
יחס שקילות R רפלקסיבי, סימטרי וטרנסיטיבי
מחלקת שקילות $[x]_R=\{y\in A|xRy\}$. **קבוצת מנה** $A/R\ =\{[x]_R|x\in A\}$.

לוגיקה

יחס נביעה $\vdash$ היא יחס בין קבוצות של נוסחאות לנוסחאות המקיים "**רפלקסיביות**" ($A\in T\rightarrow T\vdash A$), **מונוטוניות** (אם $T\vdash A$ וגם $T\subseteq S$ אז $S\vdash A$) ו"**טרנסיטיביות**" (אם $T\vdash\varphi$ ו-$T,\varphi\vdash\psi$ אז $T\vdash\psi$).

תחשיב הפסוקים הקלאסי (CPL)

מוגדר מעל הא"ב: פסוקים אטומיים (p1,p2,p3...), קשרים $\rightarrow,\wedge,\vee,-$ וסוגריים. הקטגוריה הסינטקטית היא נוסחה (או פסוק) כאשר

1. כל פסוק אטומי הוא נוסחה.
2. אם φ,ψ נוסחאות אז $-\varphi,(\varphi\wedge\psi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\rightarrow\psi)$ נוסחאות.

טענות על נוסחאות ב-CPL (להוכחה שמשהו אינו נוסחה): מספר הסוגרים הימיניים והשמאליים שווה, בין כל 2 פסוקים אטומים מופיע קשר, קשר "וגם" אינו יכול להופיע בצמוד לסוגר, מספר הסוגיים השמאליים שווה למספר הקשרים הבינאריים, מילה ב-CPL אינה מתחילה בסוגר ימיני.

הגדרה סמנטית לנביעה– ב-CPL ה"מבנה" נקרא "השמה" (פונקציה v מקבוצת הנוסחאות אל {t,f} המקיימת:
$v(-\varphi)=-^{*}(v(\varphi)),\ v(\varphi\circ\psi)=\circ^{*}(v(\varphi),v(\psi)),\ \circ=\{\vee,\wedge,\rightarrow\}$ כאשר X^{*} היא פונקציית האמת המתאימה ל-X).

נוסחה תקרא **טאוטולוגיה** (סימון $\vdash_{CPL} \varphi$)אם כל השמה היא מודל שלה.
למה: $\boldsymbol{\varphi} \vdash_{\mathbf{CPL}} \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} \vdash_{\boldsymbol{CPL}} \emptyset$ (כי כל השמה היא מודל של הקבוצה הריקה).

תורה **ספיקה** אם יש לה מודל. בהתאם, תורה **אי ספיקה** היא תורה שאין לה מודל. פסוק ללא מודל נקרא **סתירה**.

פסוקים A, B **שקולים לוגית** אם לכל השמה v מתקיים v[A]=t אמ"ם v[B]=t.

נשים לב ש**טאוטולוגיה** נובעת מכל תורה ושכל נוסחה נובעת מנוסחה שהיא **סתירה**.

טענה: פסוקים A, B שקולים לוגית אמ"ם $\vdash_{CPL} (A \to B) \wedge (B \to A)$.

טענה: יהי A פסוק ו-v, v' השמות כלשהן. אם לכל $p \in At[A]$ מתקיים v'[p]=v[p] אז v[A]=v'[A] (אינדוקציה מבנית).

קבוצת הנוסחאות האטומיות של φ מוגדרת כך:

- $At[p] = \{p\}$.
- $At[-\varphi] = At[\varphi]$.
- $At[(\varphi \circ \psi)] = At[\varphi] \cup At[\psi]$ עבור $\circ = \{\vee, \wedge, \to\}$.

קבוצת תת הנוסחאות של A מוגדרת כך:

- $Sf[p] = \{p\}$.
- $Sf[-A] = Sf[A] \cup \{A\}$.
- $Sf[(A \circ B)] = Sf[A] \cup Sf[B] \cup \{(A \circ B)\}$ עבור $\circ = \{\vee, \wedge, \to\}$.

הצבה: אם φ,A נוסחאות ו-p פסוק אטומי, אז $\varphi \left\{\frac{A}{p}\right\}$ הינו הפסוק המתקבל מ-φ ע"י הצבת A במקום p ומוגדר כך:

- אם $\varphi = p$ אז $\varphi \left\{\frac{A}{p}\right\} = A$.
- אם $\varphi = q$ כאשר $q \neq p$ אז $\varphi \left\{\frac{A}{p}\right\} = q$.
- אם $\varphi = -\psi$ אז $\varphi \left\{\frac{A}{p}\right\} = -\psi \left\{\frac{A}{p}\right\}$.
- אם $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ אז $\varphi \left\{\frac{A}{p}\right\} = \left(\psi_1 \left\{\frac{A}{p}\right\} \circ \psi_2 \left\{\frac{A}{p}\right\}\right)$ עבור $\circ = \{\vee, \wedge, \to\}$.

הערה: $\varphi \left\{\frac{A}{p}, \frac{B}{q}, \ldots\right\}$ מציין הצבה סימולטנית.

משפט ההצבה: יהיו φ נוסחה, v השמה, $q_1, \ldots, q_n$ נוסחאות אטומיות שונות זו מזו ו-$A_1,\ldots,A_n$ נוסחאות (לא בהכרח שונות). תהי v' השמה כך שאם $p=q_i$ אז $v'(p)=v(A_i)$. אחרת, v'(p)=v(p) אזי $v'(\varphi) = v(\varphi\{A_1/p_1, \ldots, A_n/p_n\})$.

טענה: אם v, v' השמות כך ש-v'(p)=v(p) לכל $p \in At[\varphi]$ אז $v'(\varphi)=v(\varphi)$ (הוכחה באינדוקציה מבנית).

טענה: אם $T \vdash_{CPL} A$ ו-σ הצבה אז $\sigma(T) \vdash \sigma(A)$.

משפט ההחלפה: נניח v השמה, A נוסחה ו-p פסוק אטומי, נגדיר השמה v' כך שאם q=p אז v'[q]=v[A], אחרת v'[q]=v[q] (q פסוק אטומי). אז לכל פסוק B מתקיים v'[B]=v[B{A/p}].

רדוקציות לשאלת נביעה

- $T \vdash_{CPL} \varphi$ אמ"ם $T \cup \{-\varphi\}$ אינה ספיקה.
- לתורות סופיות – $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \vdash_{CPL} \varphi$ אמ"ם הפסוק $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$ הוא טאוטולוגיה.

משפט הקומפקטיות

1. T ספיקה אמ"ם כל קבוצה סופית חלקית שלה היא ספיקה.
2. $T \vdash_{CPL} \varphi$ אמ"ם יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \vdash_{CPL} \varphi$.

הגדרה סינטקטית לנביעה– $T \vdash_{HPC} \varphi$ אם ל-φ יש הוכחה מ-T.

הוכחה של פסוק φ מתורה T ב-HPC היא סדרה סופית של פסוקים כך שהפסוק האחרון בסדרה הוא φ. כל איבר בסדרה הוא אקסיומה של HPC, איבר של T או פסוק שמתקבל משני פסוקים קודמים בסדרה בעזרת היסק MP.

טענה: $T \vdash_{HPC} \varphi$ אמ"ם יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \vdash_{HPC} \varphi$.

משפט הנאותות והשלמות - $\vdash_{\mathrm{CPL}} = \vdash_{\mathrm{HPC}}$. הוכחת **נאותות** ($\vdash_{\mathrm{HPC}} \rightarrow \vdash_{\mathrm{CPL}}$) מוכיחים באמצעות אינדוקציה על אורך ההוכחה. הוכחת **שלמות** ($\vdash_{\mathrm{CPL}} \rightarrow \vdash_{\mathrm{HPC}}$) היא ארוכה ומציקה.

טענה: אם לכל פסוק A ב-T_1 מתקיים $T_2 \vdash_{HPC} A$ אז לכל פסוק B, אם $T_1 \vdash_{HPC} B$ אז $T_2 \vdash_{HPC} B$.

משפט הדדוקציה הסמנטי - $T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$ אמ"ם $T \vdash_{CPL} A \rightarrow B$.

משפט הדדוקציה הסינטקטי - $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$ אמ"ם $T \vdash_{HPC} A \rightarrow B$ (אינדוקציה על ההוכחה). המשפט נכון עבור כל מערכת נוסח הילברט בה קיימות האקסיומות I1 ו-I2 ו-MP הוא כלל ההיסק <u>היחיד</u> עבור <u>שפה עם קשר הגרירה</u>.

בנק דוגמאות

1. "אם A ו-$B \rightarrow A$ ספיקות אז B ספיקה" – דוגמה נגדית: A=p ו-$B = (q \wedge -q)$.
2.