תירגול 4 באנליזה נומרית

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi(x_n)}$$

$$\phi(x_n) = \frac{f(x+f(x)) - f(x)}{f(x)}$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h^2)$$

$$x=r \quad f(r)=0 \qquad f(r+h) = h\cdot f'(r) + o(h^2)$$

הוכחת התכנסות ריבועית.

$$x_n = r+\delta$$

$$\phi(x_n) = \frac{f(r+\delta+f(r+\delta)) - f(r+\delta)}{f(r+\delta)} = \frac{f(r+\delta+\delta f'(r)) - \delta f'(r)}{\delta f'(r) + o(\delta^2)}$$

נוציא δ מחוץ לסוגריים.

הוצאנו את התוספת

$$= \frac{f(r+\overbrace{\delta\cdot(1+f'(r))}^{h}) - \delta f'(r)}{\delta f'(r) + o(\delta^2)} = f(r+h)$$

טיילור ל-$f(r+h)$ כמו ב...

$$= \frac{\cancel{\delta}(1+f'(r)+o(\delta))\cdot \cancel{f'(r)} - \cancel{\delta}\cdot \cancel{f'(r)} + o(\delta^2)}{\cancel{\delta} f'(r) + o(\delta^2)} =$$

$$= \frac{\cancel{1}+f'(r)+o(\delta) - \cancel{1}+o(\delta)}{\underbrace{1+o(\delta)}_{\approx 1}} = f'(r)+o(\delta)$$

$$x_n = r+\delta \Rightarrow \phi(x_n) = f'(r)+o(\delta)$$

נציב בנוסחה:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(\overset{r+\delta}{x_n})}{\phi(x_n)} = (r+\delta) - \frac{\delta(\cancel{f'(r)}+o(\delta))}{\cancel{f'(r)}+o(\delta)} =$$

$$= (r+\delta) - \delta(1+o(\delta)) \doteq r + \cancel{\delta} - \cancel{\delta} - o(\delta^2)$$

$$\frac{o(x)}{o(x)} = o(x)$$

כי זה $o(\delta)$ אז שווה

$$\Rightarrow x_n = r \pm o(\delta^2)$$

השגיאה היא ריבועית

תנאים לנקודת השבת:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$g([a,b]) \subseteq [a,b]$$

תנאי ליפשיץ $\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \le M < 1$

כאשר $x_n \to x$ אז $g(x) = x$

תרגיל

אם נתון ש: $g \in C^2$, $\exists \bar{x}$ כך ש- $g(\bar{x}) = \bar{x}$ ו-$|g'(\bar{x})| < 1$

גזירה פעמיים

קיימת סביבה של $\bar{x}$ שנקרא לה $N(\bar{x})$ כך ש: $\forall x_0 \in N(\bar{x})$

הסדרה כולה מתכנסת ל-$\bar{x}$. $x_n \longrightarrow \bar{x}$

למעשה אנחנו צריכים למצוא את הסביבה.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $\sigma = 1-|g'(\bar{x})|$. נובע כי: $-(1-\sigma) \le g'(\bar{x}) \le 1-\sigma$

בגלל הרציפות של g והנגזרת שלה פעמיים. אז קיימת סביבה

נובע מרציפה. $|g'(x)-g'(\bar{x})| \le \frac{\sigma}{2}$ $\quad \exists N(\bar{x}) : \forall x \in N$

$$g'(x) \le g'(\bar{x}) + \underbrace{|g'(x)-g'(\bar{x})|}_{\text{מ' נרי}} \le 1-\sigma+\frac{\sigma}{2} = 1-\frac{\sigma}{2}$$

נעשה את אותו הטריק בכיוון ההפוך:

$$g'(x) \ge g'(\bar{x}) - |g'(x)-g'(\bar{x})| \ge -(1-\sigma)-\frac{\sigma}{2} = -(1-\frac{\sigma}{2})$$

משני האי-שוויונות קיבלנו כי:

$$|g'(x)| \le 1-\frac{\sigma}{2} < 1$$

אז הוכחנו אז: $\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| < 1$. נראה כי $g([a,b]) \subseteq [a,b]$

נעשה שימוש בטיילור: <u>נראה</u> $g(\bar{x}+h) \in (\bar{x}-h, \bar{x}+h)$

$$g(\bar{x}+h) = g(\bar{x}) + h\cdot g'(\bar{x}) + \underbrace{g''(\xi)\cdot\frac{h^2}{2}}_{o(h^2)} =$$

ξ בסביבה של $\bar{x}$ נ-ח. מתאים את

נתון $g(\bar{x})=\bar{x}$

$$g(\bar{x}+h) = \bar{x} + h\cdot g'(\bar{x}) + g''(\xi) + \frac{h^2}{2}$$

כמו כן: הסרה של $\bar{x}$

$$|g(\bar{x}+h) - \bar{x}| \le |h\cdot g'(\bar{x})| + |g''(\xi)\cdot\frac{h^2}{2}|$$

לפי אי שוויון המשולש. $\le$ לב. הפרדה בין הערכים המוחלטים

$$= |h|\cdot\left(|g'(\bar{x})| + |g''(\xi)\cdot\frac{h}{2}|\right) \le$$

הוצאו h מחוץ לסוגריים

עבור מקסימום של g''.

$$(*) \quad \le \left((1-\frac{\sigma}{2}) + \frac{h}{2}\max g''\right)\cdot h$$

את h עדיין לא בחרנו. רצינו להוכיח כי קיימת סביבה.

נבחר את h להיות: $h = \frac{\sigma}{\max g''}$

$\Longrightarrow$ נציב ב-$(*)$ ונקבל: $= (\underbrace{1-\cancel{\frac{\sigma}{2}}+\cancel{\frac{\sigma}{2}}}_{1})\cdot h = h$

$\Longrightarrow |g(\bar{x}+h) - \underset{g(\bar{x})}{\bar{x}}| < h$ $\qquad (\bar{x}-\frac{\sigma}{\max g''}, \bar{x}+\frac{\sigma}{\max g''})$

<u>קירוב $\sqrt{2}$</u>

$$f(x) = x^2-2 = 0$$

$x \in [1,2]$ נשתמש בשיטת ניוטון:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{x^2+2}{2x} = \frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{x}{2} \le 1$$

$+$

מקבלים ההיפך $\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$

$$1 \le \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \le 2$$

כלומר נשארתי
באותו הטווח וקיים תנאי
1 של נקודת שבת

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} < 1$$

אפילו קטן מ-$\frac{1}{4}$
כי x המקסימלי הוא 2.