ראינו כי אם A פסוק ו-T קבוצה של פסוקים. אז

$$T \vdash_{FOL} A \iff T \vdash_{HFOL} A ,$$

בגלל שמדובר בפסוקים אז לא משנה אם זה v-נביעה או t-נביעה.

מזה מקבלים בלי קושי מיוחד: $T \vdash_{HFOL} A$ אמ"מ $T \vdash^{v}_{FOL} A$

($T \cup \{A\}$ - קבוצה של נוסחאות כלשהן כאשר לאו דווקא פסוקים).

$T \vdash_{NDFOL} A$ אמ"מ $T \vdash^{t}_{FOL} A$ ($T \cup \{A\}$ כנ"ל)

זהו ניסוח משפט השלמות במונחים של נביעה.

ניסוח: שקול

אם T מורכבת מפסוקים אז T ספיקה אמ"מ היא קונסיסטנטית.

ב- NDFOL, HFOL (אין פסוק A כך ש $T \vdash_{HFOL} A$ וגם $T \vdash_{HFOL} \neg A$)

מסקנה 1 (מניחים שמדובר בפסוקים ולכן אין הבדל בין v-נביעה ו-t)

אם T סופית אז הבעיה אם $T \vdash_{FOL} A$ הינה חצי-כריעה - (semi decidable) יש תשובה נכונה כאשר נמצא ולעולם לא יש תשובה לא נכונה.

* במונחי ספיקות, אם T סופית אז הבעיה האם T ספיקה הינה co-semi decidable.

מסקנה ב - משפט הקומפקטיות

נוסח א': $T \vdash_{FOL} A$ אמ"מ קיימת $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש $\Gamma \vdash_{FOL} A$.

נוסח ב': (במונחים של ספיקות במקום מונחים של נביעה)

תורה T היא ספיקה ב-FOL אמ"מ כל קבוצה סופית Γ החלקית לה היא ספיקה.

הנוסחים שקולים. זה בדיוק כמו במקרה של תחשיב הפסוקים.

הוכחה ב-HFOL הינה סופית ולכן הוכחה מ-T תורה מכילה

מספר סופי של נוסחאות ומכאן כיוון ה- $\Leftarrow$ בנוסח א'

σ_{PA}

0 - קבוע

S - סימן פונקציה חד-מקומי

$+, *$ - סימן פונקציה דו-מקומיים

= - סימן יחס דו-מקומי

M - המבנה הסטנדרטי של המספרים הטבעיים
(D הוא המספרים הטבעיים והפירוש של הסימנים הוא כפי שאנו
מכירים)

משפט: נניח T תורה (המורכבת מפסוקים) כך ש $M \models T$.
נראה שיש $\mathcal{M}$ כך ש $\mathcal{M} \models T$ ו-$\mathcal{M}$ לא איזומורפי ל-M.
(כלומר אין מודל <u>יחיד</u> ל-T)

<u>מסקנה:</u> אפילו אם ניקח את T כתורה $\{\varphi \mid M \models \varphi,\ \varphi \in L_{PA}\}$ (φ פסוק)
(כל הפסוקים בשפה הנכונים ב-M) לתורה זו יהיו מודלים
שאינם איזומורפיים ל-M (<u>מודלים לא-סטנדרטיים</u>)

<u>הוכחה:</u> נוסיף לשפה קבוע חדש, c, ונגדיר תורה T^* בשפה
המורחבת $T^* = T \cup \{c \neq 0, c \neq s(0), c \neq s(s(0)), \dots\}$
$c>0,\ c>s(0),\ c>s(s(0)), \dots$
(c לא 0 ולא 1 וכך הלאה)

נראה ש-T^* היא ספיקה. בשביל זה מספיק להראות שכל קבוצה
חלקית סופית של T^* היא ספיקה (לפי משפט הקומפקטיות).
נניח $\Gamma \subseteq T^*$. (ב-Γ יש שני סוגי פסוקים - פסוקים מ-T ופסוקים
מ-{...}) אז $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ כש $\Gamma_1 \subseteq T$ (סופית) ו-
$\Gamma_2 = \{c>n_1, c>n_2, \dots, c>n_k\}$ סופית
$n_i = \underbrace{s(s(s(s \dots (0)}_{n_i \text{ פעמים}}$

נבנה מבנה $M = \langle D, I \rangle$ עבור השפה המורחבת באופן הבא:
$D = N$ המספרים הטבעיים

N מתייחס רק לקבוצה ו-M זה המבנה כלומר הדומיין וגם הפירוש.
I נותן לכל הסימנים של LPA את הפירוש הסטנדרטי שלהם.
ו-$I[c]$ הוא איזשהו מספר גדול מספיק כדי שכל הפסוקים
ב-Γ_2 יהיו נכונים כלומר כדי לספק את כל הפסוקים ב-Γ_2.
<u>זה אפשרי כי Γ_2 סופית.</u> כיוון ש-$N \models T$ אז גם
$N \models \Gamma_1$ (כי $\Gamma_1 \subseteq T$) ולכן $M \models \Gamma_1$ (כי c לא מופיע ב-
Γ_1). $M \models \Gamma_2$ כי כך בחרנו את $I[c]$. לכן $M \models \Gamma$.
הראינו שכל קבוצה חלקית של T^* יש מודל, ולכן ל-T^* יש מודל)
$\langle D^*, I^* \rangle$

ובמבנה זה יש איבר $I^*[c]$ שהוא "אינסופי"

$<I^*[0], I^*[c]> \in I^*[<]$

$<I^*[s(0)], I^*[c]> \in I^*[<]$

לכן מבנה זה אינו איזומורפי ל-$\mathbb{N}$ (למספרים הטבעיים)
נשים לב שהמודל של T^* הרחבה שלו אינו המספרים הטבעיים
הכוונה שגם אם זה המספרים הטבעיים אז הפירוש שונה
ולא הפירוש הסטנדרטי.

את המשפט מפעילים בעיקר לצורת משתי התורות הבאות:

(1) $Th(\mathbb{N})$ - קבוצת כל הפסוקים ב-L_{PA} הנכונים ב-$\mathbb{N}$.

(2) PA (האריתמטיקה של פאנו)

$$\begin{cases} x+0=x \\ x+s(y)=s(x+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot 0=0 \\ x\cdot s(y)=x\cdot y+y \end{cases}$$

$$\varphi\{0/x\} \wedge \forall x(\varphi \to \varphi\{s(x)/x\}) \to \forall x\varphi$$

הפירוש של 0 בשני המודלים של התורות יהיה המספר המינימלי
המספרים הטבעיים יהיו התחלה של מודל זה סטנדרטי $0,1,2,3,\ldots$

$$\mathbb{N} \models \forall x(x\neq 0 \to \exists y\; x=s(y))$$

(כל מספר פרט ל-0 הוא עוקב של מישהו)

אין מספר ראשון שגדול מכל המספרים הטבעיים לכן במבנה הזה -
לא סטנדרטי יהיה $I[c]$ ולפניו $I[c]-1$ וכך הלאה.

$0,1,2,3,\ldots, I[c]-1, I[c]$

מסקנה אחרת מהוכחת משפט השלמות:
במודל שבונים בהוכחה של המשפט, אוסף שמות העצמים הסגורים בשפה
הוא קבוצה בת מניה.

<u>משפט סקולם-לוונהיים</u>: אם T היא תורה ספיקה (כלומר
קונסיסטנטית) אז יש לה מודל בן-מניה.

<u>"פרדוקס" סקולם</u>: לתורת הקבוצות יש מודל בן-מניה שבו נכון
שקיימת קבוצה לא בת-מניה.

בס"ד
1

נצרך את הטענה:

$$M \models \exists \mathfrak{X} \forall f\ \overbrace{f: N \to \mathfrak{X}\ \exists x \in \mathfrak{X}\ \forall y \in N\ f(y) \neq x}^{\text{(הפונ' לא על)}}$$

$$f: N \to \mathfrak{X} \overset{def}{=} \forall x \in N\ f(x) \in \mathfrak{X}$$

נשים לב: שמות עצם בשפה מסדר ראשון זה קבוע / משתנה / מה שמתקבל מקודם ע"י הפעלה של אחד מסימני היחס של הסיגנטורה.

$f(y)$ מתחזה להיות שם עצם. אך הוא אינו משתנה, אינו קבוע. f אינו פונקציה אלא משתנה כי רשמנו $\forall f$.

לא ניתן לרשום $x(y)$ כאשר x זה שם עצם בשפה. ניתן לרשום דבר כזה בלוגיקה מסדר שני.

צריך לנסח את המשפט כך: $y=f(x)$ הוא קיצור ל- $\langle x,y\rangle \in f$. נוסיף לסיגנטורה סימן פונ' דו-מקומי $Pair(x,y)$
$\langle , \rangle$. במקום $f(y)\neq x$ נכתוב $\langle x,y\rangle \notin f$
כאשר $\langle x,y\rangle$ הוא קיצור ל- $Pair(x,y)$

הסבר "לפרדוקס":

כל דבר במבנה (יש רק $\aleph_0$ פונקציות ומתוכן רק $\aleph_0$ פונקציות במבנה כי המבנה בן-מנייה) הן לא פונקציות על N.

$T \vdash^{2}_{FOL} \psi$ סופית

זה שקול לשאלה האם $T \cup \{\neg\psi\}$ ספיקה או לא?

לכן נתמקד בבעיה: בהינתן קבוצה סופית של פסוקים, איך נראה שהיא לא ספיקה.

כי $T \vdash \psi$ אמ"מ $T \cup \{\neg\psi\}$ לא ספיקה

בשלב הבא נעביר את כל הפסוקים ב-$T \cup \{\neg\psi\}$ לצורה פרנקסית נורמלית.

<u>הגדרה</u>: פסוק הוא בצורה פרנקסית-נורמלית אם הכמתים שבו מופיעים בהתחלה:

$$\underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists y_4 \forall x_{17} \exists z_{19}}_{\text{רישא}}\ \underbrace{\psi}_{\text{מטריצה}}$$

ללא כמתים

אם $T \vdash^{v} A \leftrightarrow B$ אז $T \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$ כאשר ψ' מתקבל ע"י החלפת A-ים ב-B-ים. <u>הוכחה</u>: תרגיל.

אבל זה לא נכון ב-t-נביעה: φ φ'

$$x=x \leftrightarrow x=1 \not\models^{t} \forall x(x=x) \leftrightarrow \forall x(x=1)$$

$$T=\{x=x \leftrightarrow x=1\}$$

$$A \equiv x=x, \quad B \equiv x=1$$

$$\varphi = \forall x(x=x) \quad \varphi' = \forall x(x=1)$$

$T \models^{t} A \leftrightarrow B$. אבל $T \not\models^{t} \varphi \leftrightarrow \varphi'$ כי במבנה המספרים הטבעיים ובהשמה בה $v[x]=1$ צד שמאל נכון אך צד ימין שונה – לוי בהשמה לא נכון. זה קורה כי יש בצד שמאל משתנים חופשיים. אם T מורכבת מפסוקים, אז זה נכון.

התרגום מ- $\exists xA \vee \exists xB$ לצורה פרנקסית נורמלית – פשוט: מעבר ל- $\exists x(A \vee B)$ בעזרת שקילות 2.

השימוש בשקילויות ב-6 הוא מימין לשמאל (לצורך מעבר לצורה פרנקסית נורמלית)

$$\exists xA \wedge \exists xB \equiv \exists x(\exists xA \wedge B) \equiv \exists x(\exists y A\{y/x\} \wedge B) \equiv$$

כי x לא מופיע חופשי ב- $\exists xA$

נחליף את x במשתנה חדש שלא מופיע ב-A ו-B לפי כלל α (שקילות 4)

$$\equiv \exists x \exists y\, A\{y/x\} \wedge B$$

דרך אחרת: מפעילים את כלל α בהתחלה

$$\exists xA \wedge \exists xB \equiv \exists y A\{y/x\} \wedge \exists xB$$

$$\equiv \exists y \exists x\, A\{y/x\} \wedge B \equiv \exists x \exists y\, A\{y/x\} \wedge B$$

הערה – לגבי 6 (iv): $\exists x(A \to B)$ שקול ל $A \to \exists xB$

$\forall x(A \to B)$ שקול ל $\exists xA \to B$

$$\equiv \neg\exists xA \vee B \equiv (\forall x \neg A) \vee B$$

<u>הגדרה</u>: פסוק אוניברסלי הוא פסוק מהצורה $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$ כש- φ נוסחה ללא כמתים.

דוגמה: $\forall x \exists y \forall z \forall n \exists v\, \varphi(x,y,z,n,v)$

במקום y נכניס סימן פונ' חד-מקומי $f(x)$

ובמקום v נכניס סימן פונ' חדש תלת-מקומי $g(x,z,n)$ כי v תלוי בקודמים שלו x,z,n

$$\forall x \forall z \forall n\, \varphi(x, f(x), z, n, g(x,z,n))$$

ובצורה פורמלית: $\forall x \forall z \forall n\, \varphi\{f(x)/y,\ g(x,z,n)/v\}$

תהליך

מעשירים את השפה בסימני פונקציה חדשים.
טוב היה ש-$\exists$ בהתחלה, היינו מחליפים את w בקבוע (ניתן
להסתכל על קבוע כסימן פונקציה 0-מקומי)
f ו-g שהוספנו נקראים "פונקציות סקולם".

$$\varphi = \forall x \exists y\, p(x,y)$$

צורת סקולם $sk(\varphi) \equiv \forall x\, p(x,f(x))$

$sk(\varphi)$ - מבצעים סקולמיזציה של φ.

φ אינו שקול ל-$sk(\varphi)$. $\models_{FOL} sk(\varphi)\to\varphi$ (כלומר
זה אחד נכון, $sk(\varphi)\to\varphi$ אמת לוגית) אבל

למשל $\not\models_{FOL} \varphi\to sk(\varphi)$ - כי $\forall x \exists y\, x<y \not\to \forall x\, x<f(x)$

נבחר את הפירוש של p כ-$<$ למשל ו-f פונקציית הזהות.

משפט: T ספיקה אמ"מ $sk(T)$ ספיקה.
(תהליך הסקולמיזציה משמר ספיקות)

$$\forall x \forall y\, \overbrace{p(x,y)\to\neg q(x)}^{\text{מטריצה}} \quad (*)$$

אינסטנציה סגורה של נוסחה φ היא פסוק המתקבל מ-φ
שמציבים שמ"ע במקום המשתנים החופשיים של φ

משפט הרברנד: תורה אוניברסלית T היא ספיקה אמ"מ קבוצת
האינסטנציות הסגורות של המטריצה של איברי T היא ספיקה
כתורה בתחשיב הפסוקים.

דוגמה: נציב במקום x את קבוע 0 ובמקום y את
עצם מורכב יותר $s(0)$ ב-$(*)$. נקבל $p(0,s(0))\to\neg q(0)$
אין פה כמתים ומשתנים.
נסתכל על $p(0,s(0))$ ועל $\neg q(0)$ כפסוקים אטומיים (בתחשיב הפסוקים)
כך משפט הרברנד מקשר בין ספיקות פסוקים בלוגיקה מסדר ראשון לקבוצת
הפסוקים בתחשיב הפסוקים וניתן להפעיל את האמצעים של תחשיב
הפסוקים. אם ניתן להכריע אם התורה ספיקה זה לא רק
אם התורה סופית. קבוצת האינסטנציות הסגורות יכולה להיות
אינסופית ולכן אין שיטת הכרעה אלא שיטת הכרעה למחצה.