1. $A\{t/x\} \leftrightarrow \forall x\,(x=t \to A)$

(א) באילו תנאים על A, x, t הנוסחה תקפה?

(ב) תני דוגמא שהנוסחה לא תקפה אם אחד התנאים הנ"ל לא מתקיים.

<u>התנאים:</u>

1. t אינו מכיל את x כמשתנה חופשי

<u>דוגמה נגדית:</u> $A \equiv (x=3)$, $t \equiv s(x)$

(תחת הסיגנטורה תמצא את 3 כסימן קבוע ואת s כסימן פונקציה).

נקבל:

$$A\{t/x\} = A\{s(x)/x\} \equiv (s(x)=3)$$

עלינו להראות כי $(s(x)=3) \leftrightarrow \forall x\,(x=t \to (x=3))$ אינה תקפה לוגית.

יהי $M=\langle N, I\rangle$ מבנה כך ש $I[s]=\lambda x.\, x+1$ (כפי הטבעי) $I[=]\simeq\{\langle a,a\rangle \mid a\in N\}$, (יסים תבחית) ו- $I[3]=3^I$.

תהי השמה V כלשהי כך ש $V[x]=10$. (נשים לב כי

$$\langle V[s(x)], V[3]\rangle = \langle 11^I, 3^I\rangle \notin I[=] \Rightarrow M,V \not\models (s(x)=3) \quad (1)$$

מנגד, לכל $a\in D$, $\langle V[x:=a][x], V[x:=a][s(x)]\rangle \notin I[=]$ ולכן $M,V[x:=a] \not\models (x=t)$ לכל $a\in D$ ולכן $M, V[x:=a] \models (x=t) \to (x=3)$

לכל $a\in D$ ולכן $M,V \models \forall x.(x=t)\to(x=3)$.

סה"כ נקבל כי $M,V \not\models (s(x)=3) \leftrightarrow \forall x.(x=t \to (x=3))$ ולכן

הנוסחה $A\{t/x\} \leftrightarrow \forall x\,(x=t \to A)$ לא אה"ג תקפה לוגית

2. t חייב להיות חופשי להצבה במקום x

<u>דוגמה נגדית:</u> $A=(\forall y.(y=x))$ $t=y$

נשים לב כי $A\{t/x\} = \forall y.(y=y)$,

יהי $M=\langle N, I\rangle$ מבנה בו $I[=]\simeq\{\langle a,a\rangle \mid a\in D\}$ ותהי V השמה כלשהי. כך ש- $V[y]=2^I$

נשים לב כי: לכל $a\in D$ $\langle V[y:=a][y], V[y:=a][y]\rangle \in I[=]$ ולכן $M,V[y:=a] \models (y=y)$

לכל $a\in D$ ולכן ① $M,V \models \forall y\,(y=y)$

מנגד, עבור $V'=V[x:=2^I][y:=1^I]$ נקבל $M,V' \not\models (x=y)$ ולכן $M,V[x:=2^I] \not\models \forall y.(x=y)$

כמו כן ש $M,V[x:=2^I] \models (x=y)$ נקבל כי $M,V[x:=2^I] \not\models (x=y)\to\forall y.(x=y)$ ולכן

נקבל כי ② $M,V \not\models \forall x.((x=y)\to\forall y(x=y))$

מ- ① ו- ② נקבל כי $M,V \not\models \forall y.(y=y) \leftrightarrow \forall x.((x=y)\leftrightarrow\forall y.(x=y))$.

משה

2. $\forall x.(x=0 \vee \exists y.(x=s(y))) \vdash_{FOL} \forall x.(x=0 \vee x=s(0) \vee \exists y(x=s(s(y))))$

נשים לב לסיגנטורה של השפה:

סימני קבועים: 0

סימני פונקציות: s^1

סימני יחס: $=^2$

הטענה נכונה אמ"מ $Eq(L)\cup\{\forall x.(x=0\vee\exists y(x=s(y)))\} \vdash_{FOL} \forall x(x=0 \vee x=s(0) \vee \exists y(x=s(s(y))))$

הטענה הנ"ל נכונה אמ"מ $Eq(L)\cup\{\underbrace{\forall x(x=0\vee \exists y(x=s(y)))}_{\varphi_1}, \underbrace{\neg\forall x(x=0\vee x=s(0)\vee\exists y(x=s(s(y))))}_{\varphi_2}\}$ $\Leftrightarrow$ אינה ספיקה

נעביר את φ_1 ו-φ_2 לצורה פרנקסית

$$\varphi_1 \equiv \forall x(x=0 \vee \exists y(x=s(y))) \equiv \forall x\exists y.(x=0 \vee x=s(y)) = Pernex(\varphi_1)$$

$$\varphi_2 \equiv \neg\forall x(x=0\vee x=s(0)\vee\exists y(x=s(s(y)))) \equiv \exists x.(\neg(x=0)\wedge\neg(x=s(0))\wedge\forall y.\neg(x=s(s(y))))$$

$$\equiv \exists x.\forall y.(\neg(x=0)\wedge\neg(x=s(0))\wedge\neg(x=s(s(y)))) = Pernex(\varphi_2)$$

$\Leftrightarrow$ $Eq(L)\cup\{Pernex(\varphi_1), Pernex(\varphi_2)\}$ אינה ספיקה

$Sk(Pernex(\varphi_1)) = \forall x.(x=0 \vee x=s(f(x)))$ (f סימן פונ' חדש בשפה)

$Sk(Pernex(\varphi_2)) = \forall y(\neg(c_1=0)\wedge\neg(c_1=s(0))\wedge\neg(c_1=s(s(y))))$ (c_1 סימן קבוע חדש)

$\Leftrightarrow$ $T = Eq(L)\cup\{Sk(Pernex(\varphi_1)), Sk(Pernex(\varphi_2))\}$ אינה ספיקה.

$\Leftrightarrow$ ע"פ משפט הרברנד, T אינה ספיקה אמ"מ T^*, קבוצת האינסטנציות הסגורות של הנוסחאות שב-T אינה ספיקה.

כאשר $Eq(L) = \{\forall x.\, x=x,\ \forall x\forall y.\, x=y\to y=x,\ \forall x\forall y\forall z.\, x=y\wedge y=z\to x=z,\ \forall x_1\forall y_1.\, x_1=y_1\to(s(x_1)=s(y_1))\}$

מרחב הרברנד: $\{0, c_1, s(0), s(c_1), f(0), f(c_1), \dots\}$

$$T^* = \{\overbrace{c_1=0}^{f} \vee \overbrace{c_1=s(f(c_1))}^{t},\ \overbrace{\neg\underbrace{(c_1=0)}_{f}}^{t} \wedge \overbrace{\neg\underbrace{(c_1=s(0))}_{f}}^{t} \wedge \overbrace{\neg\underbrace{(c_1=s(s(f(c_1))))}_{f}}^{t},$$

$$\overbrace{c_1=s(f(c_1))}^{t} \to \overbrace{s(c_1)=s(s(f(c_1)))}^{t},$$

$$\overbrace{f(c)=0}^{f} \vee \overbrace{f(c)=s(f(f(c)))}^{t},\ \overbrace{f(c)=0}^{f} \to \overbrace{s(f(c_1))=s(0)}^{f}$$

$$\overbrace{\neg(c_1=0)}^{t} \wedge \overbrace{\neg(c_1=s(0))}^{t} \wedge \overbrace{\neg\underbrace{(c_1=s(s(f(f(c_1)))))}_{f}}^{t}$$

$$\overbrace{c_1=s(f(c_1))}^{t} \wedge \overbrace{s(f(c_1))=s(0)}^{f} \to \overbrace{c_1=s(0)}^{f}$$

$$\overbrace{f(c)=s(f(f(c)))}^{t} \to \overbrace{s(f(c))=s(s(f(f(c))))}^{t}$$

$$\overbrace{c_1=s(f(c_1))}^{t} \wedge \overbrace{s(f(c))=s(s(f(f(c))))}^{t} \to \overbrace{c_1=s(s(f(f(c_1))))}^{t}, \dots\}$$

קיבלנו כי ב-T^* יש תת קבוצה המכילה סתירה ולכן היא אינה ספיקה. מכאן כי הטענה המקורית נכונה. מש"ל

3. בשפה הראשונה נגדיר סיגנטורה רב סוגית: r יחסים בינאריים, d תחומים, s לפריטים.

נשתמש במשתנים d^d, r^r, y^s, x^s

סימני יחס: $Holds: r \times s \times s \to o$, $Dom: r \times d \to o$, $Belongs: s \times d \to o$, $=: s \times s \to o$

סימן קבוע: R^r

<u>הגדרות</u>

(א) R הוא יחס רפלקסיבי שאינו אוניברסלי (נסמן ב- φ_1)

$$Ref[r^r, d^d] = \forall x^s . Belongs(x^s, d^d) \to Holds(x^s, x^s, r^r)$$

$$Uni[r^r, d^d] = \forall x^s . \forall y^s . (Belongs(x^s, d^d) \wedge Belongs(y^s, d^d)) \to (Holds(x^s, y^s, r^r) \vee Holds(y^s, x^s, r^r))$$

$$\varphi_1 = \forall d^d . Ref[R^r, d^d] \wedge \neg Uni[R^r, d^d]$$

(ב) אם קיים מעל תחום מסוים יחס רפלקסיבי שאינו אוניברסלי, אז יש בתחום שני איברים נפרדים (נסמן ב- φ_2)

$$\varphi_2 = (\exists r^r . Ref[r^r, d^d] \wedge \neg Uni[r^r, d^d]) \to (\exists x^s \exists y^s . \neg(x^s = y^s) \wedge Belongs(x^s, d^d) \wedge Belongs(y^s, d^s))$$

(ג) אם בתחום מסוים יש שני איברים נפרדים, אז קיים מעל תחום זה יחס רפלקסיבי שאינו אוניברסלי (נסמן ב- φ_3)

$$\varphi_3 = (\exists x^s \exists y^s . \neg(x^s = y^s) \wedge Belongs(x^s, d^d) \wedge Belongs(y^s, d^d)) \to (\exists r^r . Ref[r^r, d^d] \wedge \neg Uni[r^r, d^d])$$