עיבוד ספרתי של אותות – סיכום החומר

אותות בטלפוניה - צליל החיוג המושמע בטלפון בעת הרמת השפופרת מופק ע"י המתג הקרוב לטלפון. הצליל הומצא בשנות ה-60 (לפני כן, החיוג בוצע ע"י מרכזניות אנושיות). בארץ, מרכזיות הטלפון מאפשרות לחייג עד 10 ספרות בשניה. בעת חיוג, מתבצע במתג המקומי אלגוריתם לפיו נקבע הפלט למשתמש (צליל תפוס/צליל המתנה (Ring Back) וכו').

מבטל הדים – נוצר כדי להתגבר על הד שנוצר בעבר בעת חיוג לחו"ל באמצעות לווינים.

צליל 2100 – מודיע שברצוננו לדבר עם הרשת. אחת התוצאות של השמעתו הינה ביטול "מבטלי ההדים".

CNG – צליל סינוס טהור המושמע ע"י פקס מחייג כדי להזדהות בפני המשיב כפקס.

Answer Tone – צליל 2100 הרץ המושמע ע"י פקס משיב עד לתגובה מהצד המחייג.

Hand Shake – תהליך המבוצע לאחר השמעת צליל 2100. התהליך מתחלק ל-2. החלק הראשון הינו <u>הכרזת יכולות</u>. המחייג מצהיר "מה הוא יכול?". החלק השני הינו <u>שלב הפקודות</u> המבוצע ע"י הפקס המשיב. הפקס המשיב יודע מהן יכולות הפקס המחייג ומעביר פקודות בהתאם. תהליך לחיצת היד מתבצע באמצעות סיגנל מאופנן הנקרא <u>**FSK**</u> (Frequency Shift Key). תהליך Hand Shake מתבצע באופן איטי כיוון שבשלב זה טרם סוכמו היכולות (ולכן משתמשים במינימום האפשרי).

סיגנל מאופנן – סיגנל המכיל אינפורמציה.

כדי להבדיל בין מודם לפקס, המודם משדר 2100 עם קפיצות כל 400 מילי שנייה (במודמים חדשים בנוסף לקפיצות קיים אפנון אמפליטודה).

אות אנלוגי – מסומן כפונקציה S(t) התלויה בזמן ומוגדרת עבור $-\infty<t<\infty$. אין התחייבות שהפונקציה תהיה רציפה או גזירה. בנוסף, יש לפונקציה <u>אנרגיה סופית</u> ו<u>רוחב פס סופי</u>.

אות ספרתי – מסומן ב- S_n כאשר n הוא הזמן הספרתי ($n\in\mathbb{N}$). גם עבור האות הספרתי האנרגיה ורוחב הפס צריכים להיות סופיים.

אנרגיה של אות – מסמן את העלות של הפקת האות. ככל שהעלות גבוהה יותר, כך האנגריה גדולה יותר. באופן פורמלי אנרגיה מוגדרת להיות: עבור אות ספרתי – $E_S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|S_n|^2$ ועבור אות אנלוגי $E_S=\int_{-\infty}^{\infty}|S(t)|^2dt$.
במציאות הגדרת אנרגיה הינה בקטע מסוים (אשר מחוץ אליו היא מוגדרת להיות 0). חשוב להבדיל בין אנרגיה לאינפורמציה. המשותף לשניהם: כל דבר שמוכנים לשלב עבורו הוא אחד מהשנים (או ערבוב של שניהם). אנרגיה לא ניתן לייצר אך ניתן לשמור. אינפורמציה, לעומת זאת, מתנדפת עם הזמן.

רוחב סרט של אות – מסמן עד כמה האות משתנה. אם אין שינויים באות, רוחב הפס יהיה 0. פורמלית, רוחב סרט מוגדר ע"י טרנספורם פורייה.

אות DC – כל אות בעל ערך קבוע. סיגנל שיש לו ממוצע שאינו 0 נאמר כי יש לו <u>רכיב DC</u>.

אות Heavy Side – אות מדרגה שערכו 0 עד נקודה t=0 ומשם ערכו 1. מסומן S(t)=O(t).

UI (Unit Impolse) – מוגדר ע"פ סימן קרונקל (ערכו 0 בכל נקודה, פרט לנקודה אחת ספציפית). עבור אותות אנלוגיים משתמשים בדלתא של דיראק (זו דסטריביוציה ולא פונקציה) וקוראים לUI **"הלם"**.

סיגנל דטרמיניסטי – הינו סיגנל שניתן לנבא מה יהיה הערך שלו בזמן מסוים. אם סיגנל הוא דטרמיניסטי הוא <u>יכול להיות</u> מחזורי (כל סיגנל מחזורי הוא דטרמיניסטי אך לא להפך).

סיגנל סטוכסטי – סיגנל שלא ניתן לנבא מה יהיה ערכו בעתיד. הסיגנל הסטוכסטי ביותר נקרא "<u>סיגנל הרעש</u>" או "<u>רעש לבן</u>". סיגנל הרעש הוא הסיגנל בו יש הכי הרבה אינפורמציה. כל סיגנל שמכיל פחות אינפורמציה ניתן לנבא לפחות מעט.

סיגנל מחזורי – הינו סיגנל המקיים S(t+T)=S(t) באנלוגי ו-$\forall n. S_{n+N}=S_n$ בספרתי. ה-N/T הקטן ביותר המקיים זאת (שאינו 0) נקרא <u>המחזור</u> ו- $\frac{1}{T},\frac{1}{N}$ נקרא <u>התדר</u>.

אופרטור הקידום בזמן $\hat{Z}$ – מוגדר רק לסיגנלים ספרתיים. פורמאלית: $\forall n. \hat{Z}X_n = X_{n+1}$. ניתן למימוש רק עבור אותות דטרמיניסטיים.

אופרטור הפיגור בזמן $\hat{Z}^{-1}$ – בצורה דומה: $\forall n. \hat{Z}^{-1}X_n = X_{n-1}$. ניתן למימוש עבור כל אות אך דורש זיכרון.

נשים לב כי $x = \hat{Z}^{-1}\left(\hat{Z}(x)\right) = \hat{Z}\left(\hat{Z}^{-1}(x)\right)$.

אופרטור קוזלי – הינו אופרטור המשתמש בזיכרון.

אריתמטיקה של אותות – <u>אותות סגורים לחיבור וכפל</u>: סכום של שני סיגנלים הוא גם אות. בנוסף, ניתן לכפול אות בקבוע a. האות שיתקבל יקרא <u>האות המוגבר</u>. נשים לב כי הכפלת אות בקבוע a מגדילה/מקטינה את עוצמת האות <u>פי a^2</u>! בעבר, את פעולת ההגברה עשו באמצעות רכיבים אנלוגיים. חסרון רכיבים אלו היה בכך שההגברה לא הייתה מדויקת. אם <u>a הינו קבוע שלילי</u>, אז הקבוע מגביר את הסיגנל <u>והופך אותו</u>.

אותות כמרחב וקטורי ליניארי

ראינו כי אותות סגורים על כפל וחיבור. מכאן, כי לכל אות x ניתן להגדיר אות x– וסכומם נותן את אות ה-0. לכן, <u>אוסף כל האותות מהווים מרחב וקטורי ליניארי</u> (המרחב הוקטורי של האותות האנלוגיים והספרתיים שונה!).
בסיס מרחב האותות הספרתיים הינו **SUI (Shifted UI)**. נשים לב כי SUI הוא אינסופי בן מניה.

סיגנלים רבים ניתן לייצג ע"י סכום של סינוסים שהתדר שלהם הוא כפולה של תדר מסוים.

משפט: כל פונקציה ניתן לרשום כסכום של פונקציה זוגית ואי זוגית.

משפט פורייה: *כל פונקציה מחזורית, ניתן לרשום כסכום משוקלל של סינוסים וסכום משוקלל של קוסינוסים.*
בצורה פורמאלית: $S(t)=\sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin(l\omega t) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos(l\omega t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l e^{il\omega t}$. טור פורייה מתכנס באותה מידה בכל נקודת זמן (לעומת טור טיילור המתכנס טוב יותר בנקודת ייחוס סביבה הוא מפותח). עם זאת, טור פורייה עובד לסיגנלים מחזוריים בלבד. אנו נרצה לבטא כל סיגנל ושלם כך נצטרך להשתמש ב<u>טרנספורמציית פורייה</u>.
האומגה בטור פורייה תהיה $\omega = 2\pi f$ כאשר f הוא התדר (כלומר ω הוא התדר הנמדד ברדיאנים לשניה). לפי המשפט, הקבוצה $\{sin\omega t, cos\omega t, sin2\omega t, cos2\omega t, \dots\}$ היא קבוצה הפורשת את הפונ' המחזוריות. בנוסף, ממשפט האורתוגונאלית, מכפלת 2 סינוסים עם תדרים שונים מתאפסת. לכן, הפונקציות אורתוגונאלית ומכאן שהן בת"ל. לכן, הקבוצה מהווה <u>בסיס למרחב הפונקציות המחזוריות</u>.

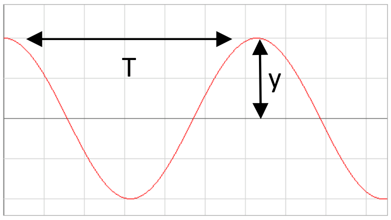
התמרה (טרנספורם) – כלי מתמטי שניתן להפעיל על מבנה אלגברי כלשהו אשר מחזיר משהו אלגברי אחר בעל אותו מבנה. נשים לב כי טור פורייה אינו טרנספורם (כיוון ש"נותנים" פונקציה ו"מקבלים" טור).

התמרת פורייה – משפט פורייה מתאים רק לפונקציות מחזוריות. לכן, נוכל להסתכל על פונקציה שאינה מחזורית כבעלת מחזור אינסוף. ניתן לתאר את הטרנספורם כפירוק של פונקציה לרכיבים מחזוריים. באמצעות טרנספורם פורייה אנו עוברים **ממרחב הזמן אל מרחב התדר**. סימון: עבור אות אנלוגי s(t) נסמן $S(\omega)$. עבור אות ספרתי S_n נסמן S_k. נשים לב כשם שבציר הזמן S_n הם המקדמים המכפילים את איברי הבסיס כך בציר התדר S_k מכפילים את איברי הבסיס (פועל בצורה דומה גם באותות אנלוגיים). נשים לב שמספר דרגות החופש נשמר גם לאחר הפעלת התמרת פורייה.

DFT – התמרת פורייה הדיגיטלית. מוגדרת להיות $Sk = \sum_{n=0}^{N-1} S_n W_N^{nk}$ כאשר S_0 מנורמל להיות הנקודה הראשונה בה האות שונה מ-0 וS_{N-1} מוגדר להיות הנקודה האחרונה בה הוא שונה מ-0. בנוסף, W_N הינו שורש היחידה מדרגה N ומוגדר להיות $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. התמרת פורייה הדגיטלית הינה התמרה הפיכה. היפוך של התמרת פורייה הדיגיטלית נקרא **iDFT**.

ספקטרום (קשת) – מילה כללית המשמשת בתחומים רבים לתאר בדרך כלל מצב הקשור ברציפות כלשהי. למשל, טווח הצבעים המתקבל כאשר מעבירים אור לבן דרך מנסרה. נשים לב כי פעולת מעבר האור בתוך המנסרה היא בעצם ביצוע של התמרת פורייה.

משפט הדגימה – קובע (ע"פ תנאי לייקורט) כי אם הדגימה מהירה יותר מפי 2 התדר המקסימאלי בספקטרום של האות, אז ניתן לחזור בצורה חד ערכית מהסיגנל הדיגיטלי שנדגם לסיגנל האנלוגי המקורי. ע"פ המשפט היחס בין הפונקציה המקורית f לדגימה f_s הוא לכל היותר $\frac{f}{f_s} = \frac{1}{2}$.



משרעת (אמפליטודה) - גודל הטווח שעל פניו משתנה הפונקציה בתחום ההגדרה שלה. זהו ההפרש בין הערך המרבי והערך המזערי של הפונקציה (מסומן כ-y בתרשים). ככל שהמשרעת <u>גדולה</u>, הפונקציה "<u>גבוהה</u>" יותר.

מופע (פאזה) - מושג שמתאר את מצבה הרגעי של תופעה מחזורית. המקום במחזור שבו הגל נמצא במצב מסוים (אינטגרל של 1/T בתרשים). ככל שהפאזה <u>קטנה</u> הפונקציה "<u>רחבה</u>" יותר. <u>תדר הינו נגזרת הפאזה</u>.

התמרת הילברט – בהינתן אות x(t) בעל <u>רוחב פס סופי</u> ואשר <u>אינו מכיל רכיב DC</u>, מאפשרת התמרת הילברט לתרגם את האות x(t) מהצורה $A(t)*\cos\phi(t)$ לצורה $A(t)*\sin\phi(t)$ כאשר A(t) הינה המשרעת (אמפליטודה) ו-$\phi(t)$ הינו פאזה. ע"פ התמרת הילברט נחשב $A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ ו-$\phi(t) = artan_4(\frac{y(t)}{x(t)})$

אפנון – דרך לשנות סיגנל כדי לגרום לו להעביר אינפורמציה ממקום למקום. למשל, משתמשים באפנון עבור AM ו-FM. ב-AM, האות הבסיסי הינו $\cos(\omega_{RF}t)$. כאשר שדרן רדיו מדבר אל המיקרופון, האות מוכפל באמפליטודה A(t) כלשהי ונשלח לאוויר. מקלט היעד יבצע היפוך של פעולה כדי לפענח מהו A(t). ב-FM, האפנון מכיל (לכאורה) אמפליטודה קבועה A והתדר משתנה. אולם, לאחר זמן מה, נראה "שיניים" בתדר (כלומר אמפליטודה לא קבועה). מצב זה נקרא <u>אפקט שטיין</u>.

עיקרון אי הוודאות – כאשר רוצים למדוד תדר של סינוס מסוים, ניתן להסתכל עליו לאורך זמן ולחשב אותו (מספר המחזורים חלקי הזמן). ככל שאורך הזמן שאנו מודדים קצר יותר, הדיוק שלנו יורד ולהפך. עיקרון אי הוודאות קובע כי דיוק החישוב שלנו ($\Delta\omega$) כפול משך הזמן שאנו מודדים (Δt) גדול שווה ל-2π ($\Delta\omega\cdot\Delta t \geq 2\pi$).

מערכות לעיבוד אותות

במערכת לעיבוד אותות הקלטים והפלטים הינם סיגנלים (<u>ולא</u> ייצוג של סיגנלים). אנו נעבוד הרבה פעמים עם מערכות עם קלט אחד ופלט אחד. נשים לב שמתקבל לפחות פלט אחד (כי אחרת היא לא שימושית). בנוסף, נזכור כי הפלט <u>אינו</u> חייב להיות תלוי בקלט (ולכן יכול להיות קבוע לכל קלט).

מערכות עיבוד אותות עם קלט יחיד ופלט יחיד

מערכת ליניארית – הינה מערכת עיבוד אותות הסגורה על פעולת חיבור ופעולת כפל בקבוע. מגבר ($Y(t)=aX(t)$) ומערכת השעיה ($Y(t) = \hat{Z}^{-k}$) הינן דוגמאות למערכות ליניאריות. לעומת זאת, מערכת המחזירה מספר קבוע לכל אות, אינה מערכת ליניארית (כי הקלט של סכום 2 אותות הוא הקבוע במקום פעמיים הקבוע).

מערכת אינוריאנטית כלפי הזמן – הינה מערכת אשר מחזירה תמיד אותו פלט עבור אותו קלט בלי תלות זמן (מערכת "בלי שעון"). דוגמה למערכת <u>שאינה</u> אינוריאנטית כלפי הזמן: $Y_n=n*X_n$.

<u>הגדרה</u>: **מסנן (פילטר)** הינה מערכת ליניארית ואינווריאנטית כלפי הזמן. אחת התכונות של מסנן הינה שמהמסנן יכול לצאת רק מה שהוכנס.

LowPass –מסנן המעביר תדרים נמוכים (מדרגה יורדת). **HighPass** –מעביר תדרים גבוהים (מדרגה עולה).

קורלציה – סכום של מכפלות כך שהאינדקס של שני הגורמים במכפלה זהה.

קונבולוציה – סכום של מכפלות אשר האינדקס של אחד מהגורמים במכפלה עולה והאינדקס השני יורד כך <u>שסכום האינדקסים קבוע</u>. למשל, ההד שמתקבל במערה הינו מסנן שבכל שלב מחזיר סכום של הצלילים שהושמעו קודם (כאשר כל צליל מוכפל בקבוע מסוים). מסנן זה ניתן לתאר באמצעות הקונבולוציה: $Y_n = \sum_{l=0}^{L} a_l X_{n-l}$. נשים לב שקונבולוציה (למשל Y_n) <u>בציר הזמן</u> תסומן y=a*x ותהיה <u>מכפלה</u> $Y(\omega)=A(\omega)*X(\omega)$ <u>בציר התדר</u> (ולהפך).

בעת קליטת שידור של אות k, מתקבל בנוסף ל-k איזשהו רעש v_n (כלומר האות שמתקבל הינו $X_n=k+v_n$). כדי לקבל את ה-k ששודר ללא הרעש, נוכל לבצע מיצוע על ערכים קודמים (כיוון שתוחלת הרעש היא 0 ולכן נקבל כי $E(X_n)=E(k)+E(v_n)=k$). כלומר, נוכל להגדיר $Y_n = \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} X_{n-l}$ כערך ששודר. נשים לב כי אם נגדיר $\forall l. a_l = \frac{1}{L}$ נקבל כי Y_n הינה קונבולוציה ($Y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l X_{n-l}$).

מסנן MA (Moving Average) – מסנן התלוי במספר <u>סופי</u> של X_i הקודמים לו. למשל, בקליטת שידור של אות לא קבוע, לא נוכל להשתמש בשיטה הקודמת (בגלל מיצוע גם של האות עצמו). לכן, נשתמש בשיטה של חלון רץ. כדי שהשיטה תתאים גם לאותות המשתנים מהר, נשתמש בממוצע משוקלל (ניתן משקל גבוה יותר סביב נק' הזמן הנוכחית). בנוסף, כדי שהשיטה תהיה סיבתית, נסתכל על פרקי הזמן שעברו (ולא נמקם את נ"ז הנוכחית במרכז החלון). סה"כ Y_n עדיין יוגדר להיות $Y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l X_{n-l}$ אך הפעם ערכי a_l ישתנו ע"פ מיקום בזמן.

מסנן AR (Auto Regressive) – מסנן המקיים את הצורה $Y_m = \alpha X_m + (1-\alpha)Y_{m-1}$. כאשר α הוא קבוע.

מסנן ARMA – הינו מסנן בעל רכיבי AR ו-MA. כלומר, זהו מסנן מהצורה $Y_n = f(X_n, \dots, X_{n-L};\ Y_n, \dots, Y_{n-M};\ n) \Rightarrow \sum_{l=0}^{L-l} a_l X_{n-l} + \sum_{m=1}^{M-m} b_m Y_{n-m}$ (מורכב מ-2 קונבולוציות). נשים לב כי כל המסננים מקיימים את הצורה הזו. כמו כן, אם $b_m \equiv 0$ נקבל מסנן AM ואם $a_l \equiv 0$ נקבל מסנן AR. ע"י הכנסת Y_n לתוך הסכום (וריפוד הסכום עם מספר קטן יותר של איברים) נוכל לקבל את הצורה הסימטרית של מסנן ARMA: $\sum_{l=0}^{L-l} a_l X_{n-l} = \sum_{l=0}^{L-l} b_l Y_{n-l}$.

אופרטור ההפרש הראשון – מסומן ב-$\widehat{\Delta}$ ומוגדר להיות $\widehat{\Delta} = 1 - \hat{Z}^{-1}$. נשים לב כי אם $y_n = \widehat{\Delta} x_n$ נקבל כי $y_n = x_n - x_{n-1}$. בנוסף, נראה כי ל-$\widehat{\Delta}$ יש תכונות דומות לנגזרת (עבור סיגנל קבוע מתקבל 0, סגירות על כפל בקבוע וכו'). עם זאת, $\widehat{\Delta}$ אינו אופרנד הנגזרת.

אופרטור ההפרש מסדר גבוה – בנוסף לאופרטור ההפרש מסדר ראשון, נוכל להגדיר את אופרטור ההפרש מסדרים גבוהים יותר (אופרטור ההפרש מסדר n מופעל על אופרטור ההפרש מסדר n-1 (בדומה לנגזרות)). נשים לב כי לאופרטור הפרש מסדר n יש תכונות הדומות לנגזרת מסדר n. **כל ייצוג סימטרי למסנן ARMA ניתן להמיר לייצוג ההפרשים** $\sum_{l=0}^{L-l} A_l \widehat{\Delta}^l = \sum_{l=0}^{L-l} B_l \widehat{\Delta}^l$.

זיהוי מערכות

ישנם 2 סוגי בעיות בנושא זה: הסוג הקל והסוג הקשה. במקרה הקל, נוכל להכניס איזה קלט שנרצה ולהסתכל על הפלט. במקרה הקשה אנחנו לא קובעים איזה קלט יכנס אך יכולים לראות מה נכנס ומה יצא. נשים לב שכדי שיהיה ניתן לזהות מערכת, חייבים לדרוש שהמערכת תהיה אכ"ה וליניארית (כלומר מסנן). אחרת, לא נוכל לחזות מה המערכת תעשה על בסיס תצפיות קודמות.

1. **חופש בבחירת הקלטים** ("המקרה הקל")

כאשר אנו יכולים להכניס אילו קלטים שנרצה למערכת, נוכל להשתמש ב-2 אסטרטגיות.

"אסטרטגיית הסינוס"

סינוס אינו אות עצמי של מסנן. לכן, בהכנסת סינוס עם תדר מסוים, נקבל סינוס עם אותו התדר עד כדי הזזה ימינה/שמאלה/הגברה/הנמכה (תגובה זו הינה ה**תגובה לתדר (FR)**). לכן, נוכל לבנות טבלת תגובה לסינוסים עבור התדרים השונים (שתכיל את האמפליטודה והפזה עבור כל אחד מהם). ע"פ משפט פורייה, כל אות ניתן לפרק לסינוסים וקוסינוסים (פורשים את מרחב האותות) ולכן, לאחר פירוק כל אות לסכום, נוכל (ע"י שימוש בליניאריות המסנן והטבלה שבנינו) לדעת מה יהיה הפלט עבורו.

"אסטרטגיית המתקף"

באסטרטגיה זו, נבצע הכנסה של קלט שהוא 0 בכל מקום פרט לנקודת זמן בודדת. אם המערכת היא מערכת ללא זיכרון, גם הפל יהיה 0 בכל הזמנים, פרט לנקודת ההלם. בכלליות, עבור מערכת סיבתית, כתוצאה מההלם נקבל תגובה החל מנקודה בה התקיים. פלט זה של קלט "הלם" נקרא "תגובת המערכת להלם".

FIR – מסנן אשר בתגובה ל"הלם", תגובת המסנן תחזור להיות 0 לאחר זמן סופי. למשל, $y_n = x_n + x_{n-1}$.
IIR – מסנן אשר לאחר קלט "הלם" אינו חוזר אף פעם להיות 0. למשל, $y_n = x_n + y_{n-1}$.

כל *FIR* הוא סיגנל מסוג *MA* וכל *IIR* הוא סיגנל מסוג *AR* או *ARMA*!

טענה: באמצעות **תגובה להלם (IR)** ניתן לזהות מערכת (התגובה מכילה את כל האינפורמציה על המערכת).
הוכחה: כיוון שהמערכת אינווריאנטית כלפי הזמן, ברגע שאנו יודעים את התגובה להלם בנקודת זמן כלשהי n_0, אנו יודעים את התגובה עבור כל נקודת זמן אחרת. בנוסף, היות ו-SUI פורש את כל האותות וכן, כיוון שהמערכת ליניארית, נוכל לדעת עבור כל אות מה תהיה תגובת המערכת (ע"י הסתכלות על רכיבי הבסיס שלו).

נסמן את התגובות להלם (IR) בזמן n כ-h_n. נשים לב כי מהטענה נובע שכל מסנן ניתן לייצג ע"י הצורה $y_n = \sum_l h_l x_{n-l}$. כלומר, ניתן לייצגו ע"י הקונבולוציה $y=h*x$. ראינו כי קונבולוציה בציר הזמן הינה כפל בציר התדר ולכן $Y_k=H_kX_k$. נשים לב שנקבל כי H_k הם למעשה התגובות להלם (FR) (לא נוכל לבודד את H_k כיוון שבמקומות רבים $X_k=0$). כלומר, **התגובה להלם הינה DFT של התגובה לתדר ולהפך**.

2. **חוסר שליטה על בחירת הקלטים** ("המקרה הקשה")
בעיה זו מוגדרת להיות קשה יותר כיוון שלעיתים לא נוכל אפילו לדעת מה הפתרון (למשל, כאשר נכנס כל הזמן 0).

עבור מסנן MA עם מספר ידוע של מקדמים וקלט אשר מתחיל ב-0 עד נקודה מסוימת
הצורה הכללית של מסנן MA הינה $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}$. נסמן את נקודת הזמן בה הקלט לראשונה אינו 0 כ- n=0. במקרה כזה, נוכל תחילה לחלץ את a_0 (באמצעות x_0 ו- y_0). לאחר מכן נחלץ את a_1 וכך הלאה.
באופן כללי, נוכל לתאר את התהליך באמצעות משוואה עם מטריצה **טמפליצית** (מטריצה שהאלכסונים שלה מכילים אותו ערך לאורך כל אלכסון):

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{L-1} \end{pmatrix}$$

נוכל למצוא את המטריצה ההופכית למטריצה הטמפליצית משולשית תחתונה יחסית בקלות ($O(n^2)$) וע"י הכפלה במטריצה ההופכית, נמצא את ערכי $a_0,\dots,a_{L-1}$. נשים לב שכדי למלא את וקטור ערכי y ומטריצת ערכי x, נצטרך רצף קלטים שאינו מכיל 0 (כנראה רצף באורך n).

עבור מסנן MA עם מספר ידוע של מקדמים וקלט אשר אינו מתחיל ב-0
נוכל להשתמש בתהליך דומה למקרה הקודם. עם זאת, כיוון שערכי הקלטים לפני תחילת ההתבוננות לא היה 0, נקבל משוואה שאינה מכילה מטריצה משולשית תחתונה. כלומר, נקבל את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & \cdots & \boldsymbol{x_{1-L}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{L-1} \end{pmatrix}$$

גם הפעם התקבלה מטריצה טפליצית ולכן נוכל למצוא את ההופכית בקלות יחסית ($O(n^2)$) גם כאן. עם זאת, נשים לב שהפעם כדי למלא את וקטור ערכי y ומטריצת ערכי x, נצטרך רצף ארוך יותר של קלטים שאינו מכיל 0 (כנראה רצף באורך 2n-1).

סה"כ ראינו כי כדי לפתור בעיה של **זיהוי מסנן <u>MA</u> עם מספר ידוע של מקדמים**, ניתן לכתוב משוואות, מהן לקבל מטריצה טמפליצית (אותה ניתן להפוך בקלות) ומהכפלת המשוואה בהופכית לקבל את המקדמים הדרושים. למשוואות אלו קוראים **המשוואות של *ווינר-הופף (Winner-Hopf)***.

עבור מסנן AR עם מספר ידוע של מקדמים
גם במקרה זה נוכל לכתוב משוואות באמצעות הסתכלות על ערכי הקלט והפלט. הפעם נקבל את המערכת:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{L-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} y_0 & \cdots & y_{1-L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{L-1} & \cdots & y_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{L-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y} = \underline{X} + \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{b} \Rightarrow \underline{b} = \underline{\underline{Y}}^{-1}(\underline{Y} - \underline{X})$$

כלומר, גם למסנן AR יש פיתרון כי המטריצה היא טפליצית. למשוואות בהן אנו נעזרים כדי לפתור בעיה של **זיהוי מסנן <u>AR</u> עם מספר ידוע של מקדמים** קוראים **המשוואות של *יול-ווקר (Yule-Walker)***.

עבור מסנני ARMA
אם היינו מנסים לחזור על התהליך, היינו מקבלים מטריצה שאינה טפליצית (כלומר, קשה בפרקטיקה לפתור את הבעיה).

פונקציה יוצרת הינה שיטה להפיכת סדרה אל פונקציה. אנו זקוקים לפונקציות יוצרות כיוון שיותר קל להוכיח דברים על פונקציות מאשר על סדרות.

התמרת (טרנספורם) Z – בדומה לפונקציה יוצרת, התמרת Z לוקחת סדרה ומפיק ממנה פונקציה (פורמלית: $(S(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \cdot z^{-n}$). עם זאת, קיימים 3 הבדלים לעומת פונקציות יוצרות: הסדרה מתחילה מ-(∞-) ולא מ-0, ערך החזקה הוא שלילי וכן הפונקציה מעל המורכבים. נשים לב שלמרות השם, **טרנספורם Z <u>אינו</u> טרנספורם** (כיוון שמסדרה מקבלים פונקציה). התמרת Z מקיימת את התכונה $ZT(\hat{z}^{-1}S) = \hat{z}^{-1} \cdot ZT(S)$. בנוסף, <u>התמרת Z הינה הכללה של התמרת פורייה לכל מרחב המורכבים</u>. התמרת פורייה מוגדר אך ורק לסיגנלים ספרתיים (המקביל עבור סיגנלים אנלוגיים נקרא התמרת לפלס).

פונקציית התמסורת – דרך רביעית לייצג מסנן. בשיטה זו אנו מבצעים התמרת Z לקלט x ולפלט y (על ידי הפעלת טרנספורם Z על משוואת התגובה להלם $(y_n = \sum_l h_l x_{n-l}$). כתוצאה מהתמרה אנו מקבלים כי

Y(z)=H(z)X(z). כאשר, H(z) היא פונקציה רציונלית ומהווה טרנספורם Z של התגובה להלם. כלומר, נוכל להגדיר $H(z)=\frac{Y(Z)}{X(Z)}$. דרך נוספת כדי לקבל את פונקצית התמסורת H(z) היא הפעלה של התמרת Z על משוואת ההפרש.

במקרה זה, נקבל כי $H(z)=\frac{A(Z)}{B(Z)}$. כיוון ש-A(z) ו-B(z) הם פולינומים סופיים, נסיק כי H(z) הינו יחס של שני פולינומים (פונקציה רציונאלית).

ייצוג מסנן ע"י אפסים וקטבים – זוהי דרך חמישית לייצוג מסנן. ראינו כי פונקצית התמסורת הינה פונקציה רציונאלית. מהמשפט הבסיסי באלגברה הסקנו כי ניתן לייצג כל פונקציה רציונאלית בצורה חד ערכית (עד כי קבוע) ע"י האפסים והקטבים שלה. כאשר ה"**אפסים**" הינם שורשי הפולינום שבמונה וה"**קטבים**" הינם שורשי הפולינום שבמכנה.

All-Zero – כינוי נוסף למסנן MA. נובע מהעובדה שב-MA אין קטבים אלא רק אפסים (הסכום במכנה שווה ל1).
All-Pole – כינוי נוסף למסנן AR. נובע מהעובדה שב-AR אין אפסים אלא רק קטבים (הסכום במכנה שווה ל1).
Pole-Zero – כינוי נוסף למסנן ARMA. מצב בו יש גם אפסים וגם קטבים.

משמעות אפסים וקטבים

- כדי שפונקצית התמסורת תהיה ממשית אז השורשים צריכים להיות ממשיים או זוגות של מספרים צמודים מורכבים.
- מסנן אינו חייב להעביר כל תדר (אסור לו לייצר תדרים חדשים). כדי שמסנן לא יעביר תדר מסויים, יש לשים אפס במקום המתאים על מעגל היחידה (כי אז H(z) יתאפס בתדר זה והתדר לא יעבור). למשל, אם נשים אפס עבור תדר 0, המסנן לא יעביר רכיבי DC.
- כאשר יש לנו קוטב על מעגל היחידה, נסיק כי עבור תדר זה, עוצמת המסנן תגדל מאוד ו-Y(w) "מתפוצץ". הסיבה שעוצמת המסנן תהיה גדולה הינה כיוון שנוצר 0 במכנה של H(w).
- ככל שאפס או קוטב יותר קרוב למעגל היחידה, ההשפעה שלו יותר חדה ומקומית. ככל שהוא מתרחק ממעגל היחידה, ההשפעה יותר רחבה (כאשר אפס מבצע הנמכה וקוטב מבצע הגברה).ח

תורת הגרפים ב-DSP

אנחנו נתעסק עם גרפים מכוונים בהם הקודקודים יציינו אותות והקשתות יציינו מערכות לעיבוד אותות. כדי לציין נקודות זיכרון בגרף, נסמן נקודה. המשמעות של הגרפים ב-DSP הינה **משמעות טופולוגית.** דוגמאות: הגרף x-- →y מחבר את 2 האתות x ו-y ולמעשה מציין את השיוויון y=x. הגרף $x \rightarrow \boxed{n} \rightarrow y$ מציין מערכת שבה x הוא הקלט ו-y הוא הפלט. הגרף $x \xrightarrow{G} y$ משמעותו y=Gx (כאשר G הינו הגברה).

משפט: כל שני מסננים מתחלפים. כלומר x העובר דרך המסנן g ואחריו דרך המסנן f זהה למקרה בו x עובר דרך f ולאחריו דרך g.

Tapped Delay Line – הנו קו השהיה. מעין חוט ארוך שלוקח לאות זמן לרוץ לאורכו. ככה שנתקדם נקבל משהו יותר מושהה. מייצג למעשה מעין מבנה נתונים מהסוג FIFO.

MAC (Multiply and Accumulate) – הינה שיטה בה אנו מכפילים וצוברים את התוצאה. מעבד אשר מבצע MAC באופן יעיל הינו מעבד DSP.

גרף של מסנן המכיל מעגל מייצג תמיד מסנן AR. למעגל שמתקבל קוראים משוב.

ביבליוגרפיה
מבוסס על שיעורי הקורס "עיבוד ספרתי של אותות" / יעקב שטיין, חורף תש"ע, אוניברסיטת ת"א