29/11/09

מד"ר - שיעור 7

סיכום

* כל מה שאני מציג עבור מד"ר מסדר 2 ניתן להכליל עבור מד"ר מסדר n

$$(1)\quad P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

1. אנו מניחים כי $P(x)\neq 0$ בקטע I. בפרט, אם $P(x_0)\neq 0$, אזי x_0 היא נק' רגילה של (1)
2. מניחים כי הפונקציות $p(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$, $q(x)=\frac{R(x)}{P(x)}$ הן אנליטיות בנקודה x_0
3. המשפט שהוכחנו בשיעור הקודם מבטיח כי אם x_0 היא נק' רגילה של (1) אזי פונקציה ניתן לבטוי: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$
כאשר a_0,a_1 הם קבועים חופשיים לבחירה ו- y_1,y_2 בת"ל ופונ' אנליטיות ברדיוס התכנסות S
4. פתרנו את $y''-xy=0$ פעם אחת סביב הנק' $x=0$ וקיבלנו y_1,y_2 ; $\sum a_nx^n$
ופעם סביב הנק' $x=1$: y_3,y_4 , $\sum b_n(x-1)^n$

עבור להוכחת המשפט של הצגת הפתרון ע"י טור בסביבת הנק' הרגולרית:

למה (אי-שוויון של קושי)

אם לטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ יש רדיוס התכנסות R אזי קיים קבוע סופי M כך ש $|a_n|r^n \le M,\ n=0,1,2,\ldots$ לכל x המקיים $|x-x_0|=r<R$

הוכחה: על פי ההנחה הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתכנס ב- $|x-x_0|=r<R$

תנאי הכרחי להתכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_nr^n$ הוא $\lim_{n\to\infty}|a_nr^n|=0$

לכן קיים קבוע N כך שעבור $n>N$: $|a_n|r^n\le 1$

אם נבחר $M=\max(|a_0|,|a_1|r,\ldots,|a_N|r^N,1)$ אזי בעבור $|a_n|r^n\le M$ □

$$|a_n|\le \frac{M}{r^n}$$

עבור למשפט עצמו

1. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $x_0=0$ (אחרת, מזיזים את הציר כפי שהוכח)
לכן, נחפש פתרון מהצורה $(1)\quad y=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

$$(2)\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}\ ,\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$(*)\qquad y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

(ש-p ו-q אנליטיות בסביבה מסוימת)

על-פי הנחת המשפט ניתן לפתח את $p(x)$, $q(x)$ לטור

$$(3a)\qquad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \qquad |x|<\rho=\rho_2$$

$$(3b)\qquad p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad |x|<\rho=\rho_1$$

ניקח את $\rho<\rho_*=\min(\rho_1,\rho_2,1)$. אז לפי הלמה שהוכחנו

הטורים (3a), (3b) מתכנסים ברדיוס ρ, ולכן $|b_n|\rho^n\le M_1$

$|d_n|\rho^n\le M_2$

נציב את y ונגזרותיה במשוואה $(*)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)=0$$

נבצע אינדקסים ; (לצורך השוואת מקדמים בהמשך)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)=0$$

נבצע את כפל הטורים

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+q_n\right]x^n=0$$

כאשר $q_n=\sum_{k=0}^{n}\left(b_{n-k}(k+1)a_{k+1}+d_{n-k}a_k\right)$

מכאן יש לנו נוסחת נסיגה לכל n $n=0,1,2,\ldots$

$$a_{n+2}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}q_n$$

מכאן שאפשר לחשב את a_n

כדי לאפיין את a_n נעזר בלמה של קושי ובתחום ההתכנסות של טורי

ההגדרה של $p(x)$ ו $q(x)$ $\qquad |d_n|\rho^n\le M_1 \quad |b_n|\le\frac{M_1}{\rho}<\frac{M}{\rho}$

$|b_n|\rho^n\le M_2 \quad |d_n|\le\frac{M_2}{\rho};\frac{M}{\rho}$

נגדיר $M_*=\max(M_1,M_2,|a_1|\rho,1)$ ונבחר $M>M_*$. ניתן להניח כי $0<|a_0|<1$

נוכיח באינדוקציה כי $|a_n|<\left(\frac{M}{\rho}\right)^n$;

* $n=0$; $|a_0|<1$

* $n=1$; $a_1<\frac{M}{\rho}$ עפ"י הנחה על M

* נניח שלכל $n>k>1$ מתקיים $|a_k|\le\left(\frac{M}{\rho}\right)^k$ ונוכיח את זה עבור a_n

נוכיח את הטענה עבור a_{n+2}

$$|a_{n+2}|\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}|q_n|\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)|a_{k+1}||b_{n-k}|+\sum_{k=0}^{n}|d_{n-k}||a_k|\right]$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{M^{k+1}}{\rho^{k+1}}\cdot\frac{M}{\rho^{n-k}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{M^{k}}{\rho^{k}}\cdot\frac{M}{\rho^{n-k}}\right]$$

$$|a_{n+2}| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}\left\{(k+1)\frac{M^{k+2}}{\rho^{n+1}}+\frac{M^{k+1}}{\rho^{n}}\right\}\right]$$

בה״כ נניח $M>1$, $\frac{1}{\rho}\ge 1$

$$|a_{n+2}| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}\left\{(1+k)\left(\frac{M}{\rho}\right)^{n+2}+\left(\frac{M}{\rho}\right)^{n+2}\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{M}{\rho}\right)^{n+2}\left[\sum_{k=0}^{n}\left\{(1+k)+1\right\}\right]$$

$$|a_{n+2}| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{M}{\rho}\right)^{n+2}\left(\frac{1}{2}(n+2)(n+1)+(n+1)\right)$$

$$|a_{n+2}| \le \frac{\cancel{(n+1)}(n+4)}{2\cancel{(n+1)}(n+2)}\left(\frac{M}{\rho}\right)^{n+2}$$

נשנה אינדקס $n+2\to n$, עבור $n\ge 2$

$$|a_n| \le \left(\frac{n+2}{2n}\right)\left(\frac{M}{\rho}\right)^{n} \le \left(\frac{M}{\rho}\right)^{n}$$

$$|a_n| \le \left(\frac{M}{\rho}\right)^{n}$$

מתקיים $|x|\le\frac{\rho}{2M}$ עבור

$$|a_n x^n| \le \frac{\cancel{M^n}}{\cancel{\rho^n}}\cdot\frac{\cancel{\rho^n}}{2^n\cancel{M^n}}=\frac{1}{2^n}$$

וכיוון ש- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס בהחלט, לכן גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בתחום $|x|<\frac{\rho}{2M}$, □

(קיבלנו שבסביבה של נק' רגולרית קיים פתרון אנליטי)

דוגמא 1 Legendre

$$(1-x^2)y''+2xy'+\alpha(1+\alpha)y=0$$, α מקדם מספרי

$$p(x)=\frac{2x}{1-x^2} , \quad q(x)=\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-x^2}$$

לכן תחום ההתכנסות המינימלי הוא $|x|<1$ כי רדיוס ההתכנסות של $\frac{1}{1-x^2}$ הוא 1 ,

($x=\pm1$ נק' סינגולריות כי המקדם של y'' מתאפס.)

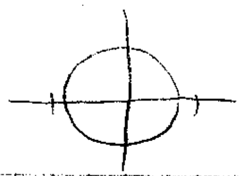
למרות רדיוס ההתכנסות גדול מ- 1 אלא אם נבחר $\alpha=N$, טבעי (α שלם)

נקבל שפתרונות המד״ר הן פולינום ממעלה N , למשל, עבור $\alpha=1$

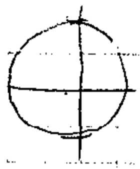
ישנו פתרון $y=x$ ועבור $\alpha=2$ $y=2x^2-1$ (מקבלים את פולינומי

לג'נדר)

אם P, Q ו- $R(x)$ הם פולינומים אז רדיוס ההתכנסות של ②
Q/P ו- R/P הוא המרחק הקרוב ביותר מ- x_0 לשורש של $P(x)$
בין אם ממשי או מרוכב.



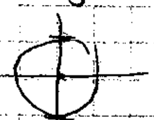
למשל, עבור $\frac{1}{1-x^2}$ ההתכנסות היא



עבור $\frac{1}{1+x^2}$ השורשים הם $\pm i$ לכן ההתכנסות בתחום
(צריך להסתכל על המישור המרוכב)

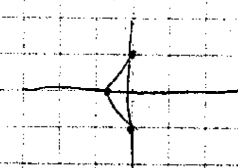
נסתכל על הדוגמא הבאה:

$$(1+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0$$



סביב $x_0=0$, השורשים של P הם $x=\pm i$

אם נחפש פיתוח סביב $x_0=-\frac{1}{2}$, השורשים נשארים אותו דבר



אבל כעת: המרחק ל- $\pm i$ הוא $\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

לכן הפיתוח $y=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$
מתכנס לפחות בתחום $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$

<u>סינגולריות לא פרועה/מבודדת</u> $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

p לא הולך לאינסוף יותר מהר מ- $\frac{1}{x}$ ו- q לא הולך לאינסוף
יותר מהר מ- $\frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} x^2q(x)=\text{finite}$, $\lim_{x\to 0} x\cdot p(x)=\text{finite}$

נכפול את המשוואה ב- x^2: (נגדיר $xp=p_*$, $x^2q=q_*$)

$$x^2y''+x[xp]y'+[x^2q]y=0$$

$$x^2y''+xp_*(x)y'+q_*(x)y=0 \quad (1)$$

בדוגמה זו p ו- q אנליטיות. אם ניקח רק את האיברים הראשונים
הפיתוח מקבל: $x^2y''+xp_*(0)y'+q(0)y=0$ - משוואת אוילר.

נראה כי למשוואה (1) אין פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$
אלא פתרון מהצורה $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ כאשר ה- r הם
פתרון המשוואה האופיינית. (x^{r_1}, x^{r_2})

יש פה קצת אלגברי שנכפל פונ' אנליטית. בכלל ההתנהגות—
של P ב- $x=0$ (הסינגולריות) הפתרון לא בהכרח פונ' אנליטית אבל ניתן
להפוך אותו למכפלה של קצת אלגברי בפונ' אנליטית בגלל
(סדר)ה של הסינגולריות.

מצב״ $P(x_0)y''+Q(x)y'+Ry=0$ (1)

נניח ש- R, Q ו- P הם פולינומים ללא גורמים משותפים. (בצמצמנו את כל הגורמים המשותפים)

הנקודה x_0 שבה $P(x_0)=0$ תקרא נק׳ סינגולרית של (1)

דוגמאות: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

המשוואה הזו מגדירה פונקציית Bessel

Legendre - $(1-x^2)y''+2xy+\alpha(1+\alpha)y=0$

בנק׳ סינגולריות לא מובטח פיתוח טיילור (אנליטיות במובן אחרות)

תרגיל: $x^2y''-2y=0$

עבור $x>0$ $(x<0)$ יש למשוואה שני פתרונות: $y_1=x^2, y_2=\frac{1}{x}$

כאשר אחד אנליטי והשני לא.

$x^2y''+2xy'+2y=0$

נמצ״ב 2 פתרונות ב.ת.ל $y_1=x$, $y_2=x^2$ כלומר ניתן לכתוב את הפתרון הכללי כך: $y=c_0x+c_1x^2$ (בכל נקודה)

הנק׳ $x=0$ היא נק׳ קריטית שכן $y(0)=0$ ולא ניתן לתת תנאי התחלה כרצוננו. כלומר למרות שהפתרונות רגולריים (יפים) הקריטיות נקבעות פה בדרך אחרת.

נבחין בנק׳ סינגולריות מהסוג הבא:

אם $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$, $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ הן פונקציות אנליטיות בנק׳ x_0.

פעמים והתמונה הכללית של y'' כפל ב- $(x_0-x)^i$, $i=1,2$ אפשר "להחזיר" את האנליטיות. נניח $x_0=0$ אז:

$$x^2y''+x[xp]y'+[x^2q]y=0$$

$$x^2y''+xP_*(x)y'+q_*y=0$$

P_* ו- q_* אנליטיות ב- $x_0=0$

דוגמא: $2(x-2)^2xy''+3xy'+(x-2)y=0$

$x=0$ היא נק׳ סינגולרית רגולרית, $x=2$ אינה נק׳ סינגולרית רגולרית

(irregular singularity)

לבדוק בבית!

הנחנו כי P_* ו- q_* פונ' אנליטיות ב- $x_0=0$, לכן

עבור $x^2y''+xP_*y'+q_*y=0$

ניתן לכתוב $P_* = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $q_* = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$

לא נחפש פתרון מהצורה $y=\sum a_n x^n$:

נתחיל במקרה הפשוט, כלומר $\begin{cases} p_1=p_2=\dots=0 \,,\; p(0)=p_0\neq 0 \\ q_1=q_2=\dots=0 \,,\; q(0)=q_0\neq 0 \end{cases}$

נקבל: $x^2y''+xp_0y'+q_0y=0$

זוהי משוואת אוילר שדיברנו עליה בעבר, נזכר:

עבור $x<0$ המשוואה משתמרת, (עבור x — המכפלה לסכו)

ע"י הגדרת משתנה חדש: $s=\ln x=\eta+s$ כאשר $\eta=\ln x$

$\boxed{s=\ln x}$

נקבל במש"ד: $\frac{d^2y}{ds^2}+(p_0-1)\frac{dy}{ds}+q_0y=0$

$y=e^{rs}$

המשוואה האופיינית היא: $\varphi(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=0$

פתרונותיה הן: $e^{r_1 s}, e^{r_2 s}$ במקרה שה- r-ים שונים.