

$$\varphi = \forall x.(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x.A \rightarrow \exists x.B)$$

הוכחה מפה גאי

ו מודול מינימום קדום נתקה ב הוכחה כי אם $M, V \not\models \exists x.A \rightarrow \exists x.B$ אז $M, V \models \forall x.(A \rightarrow B)$ ו $M, V \not\models \varphi$ ו

(1) $M, V \not\models \exists x.B$ ו $M, V \models \exists x.A$ אז $M, V \not\models \exists x.A \rightarrow \exists x.B$ כ"י 8

(2) $M, V \models A$ ו $V \models B$ ו $V \models \neg x$ א"פ, $M, V \models \exists x.A$ ו

(3) $M, V \models A \rightarrow B$ א"פ ו $V \models B$ א"פ ו $\neg x$ א"פ $M, V \models \forall x.(A \rightarrow B)$ נ

$M, V \models B$ א"פ ו \rightarrow הוכחה של הטענה שמיינן מ"מ (3)-1 (2)-א
ו (1)-ב מ"מ $M, V \models \exists x.B$ א"פ ו $V \models B$ א"פ ו $\neg x$ א"פ ו $V \models \exists x.A$ ו

ב' סע

$$\varphi = \forall x.(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x.A \rightarrow \forall x.B)$$

הוכחה מפה גאי

ו מודול מינימום קדום נתקה ב הוכחה כי אם $M, V \not\models (\forall x.A \rightarrow \forall x.B)$ אז $M, V \not\models A$ ו $M, V \models B$ ו

$M, V \not\models A$ א"פ ו $M, V \models B$ א"פ ו $M, V \not\models (\forall x.A \rightarrow \forall x.B)$ ו

$M, V \not\models B$ ו $V \models \neg x$ א"פ $M, V \not\models \forall x.B$ ו

$M, V \not\models A$ א"פ ו $V \models \neg x$ א"פ ו $M, V \models \forall x.(A \rightarrow B)$ ו
(*) $M, V \models B$ ו

$M, V \not\models A$ ו $(*)$ $M, V \not\models B$ ו $(*)$ $V \models \neg x$ א"פ ו V

$M, V \models A$ ו $V \models \neg x$ א"פ, $M, V \models B$ ו $V \models \neg x$ א"פ ו V

ב' סע

$$\varphi = (\exists x.A, \exists x.B) \rightarrow \exists x.(A \wedge B)$$

הוכחה מפה גאי

הוכחה: $B = P(x) - 1$ $A = R(x)$ ו $A \wedge B$ נתקה ב הוכחה כי אם $I[P] = \{2\}$ ו $I[R] = \{13\}$ ו $I - 1 = \{1, 2\}$ ו M מ"מ

ו $V \models A$ ו $V \models B$ ו $V \models \neg x$ א"פ ו $V \models \neg x$ א"פ ו $V \models A \wedge B$ ו

שניהם מתקיימים

ו $(1 \in I[R] \wedge 1 \in I)$ $M, V \models x=13 \models A$ א"פ ו $V \models x=13$ ו

(1) $M, V \models \exists x.A$ ו $\exists x.A \models V \models x=13 \wedge x < 13$ ו $V \models x=13 - 1$

ואילו $x=13 - 1 = 12 \in I[P] - I$ ו $M, V \models x=13 \models B$ א"פ ו $V \models x=13$ ו

$M, V \models (\exists x.A, \exists x.B)$ א"פ ו \wedge ו $\neg x$ ו $\neg x$ ו $(2) \wedge (1)$ ו $(2) \wedge (1)$ ו $M, V \models \exists x.B$ ו

ו

(2) $M, V \not\models \exists x(A \wedge B)$ \vdash

3. $M, V \not\models A$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

המטרה גורילה ופוקה מוכיחים (2)-(3)-1

☒ סענ

$$x \notin FV[A], \varphi = \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B) \quad 3$$

לעתה מוכיחים (2)-(3)-1

$M, V \models A \rightarrow B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(1) $M, V \not\models A \rightarrow \forall x.B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(2) $M, V \not\models B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(3) $M, V \models A$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

\forall בק. $M, V \not\models (A \rightarrow B)$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(4) $M, V \not\models A \rightarrow \forall x.(A \rightarrow B)$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

☒ סענ

$$x \notin FV[A], \varphi = \forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x.B) \quad 3$$

לעתה מוכיחים (2)-(3)-1

$M, V \models A \vee B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(1) $M, V \not\models A \vee B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(2) $M, V \not\models B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(3) $M, V \not\models A$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

\forall בק. $M, V \not\models (A \vee B)$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

(4) $M, V \not\models A \vee \forall x.B$ (בנ"ד) \rightarrow מוכיחים (2)-(3)-1

☒ סענ

$$\varphi = (\forall x. \exists y. A) \rightarrow (\exists y. \forall x. A) \quad 1$$

המטרה גורילה ופוקה מוכיחים (2)-(3)-1

$A \equiv = (+, (x, y), 0)$ \wedge מוכיחים (2)-(3)-1

- $I[=] = I[+] = I[0] = \text{פונקציית}$ $I[-]$ מוכיחים (2)-(3)-1

$I[+] = \lambda x.y. (x+y+1) \bmod 3 - 1$ מוכיחים (2)-(3)-1

$M, V[x:=13][y:=13] \models A$ מוכיחים (2)-(3)-1

$M, V[x:=13] \models \exists y. A$ מוכיחים (2)-(3)-1

$M, V[x:=0] \models \exists y. A$ מוכיחים (2)-(3)-1

- סמסג - מלחין
- $M, V \models \forall x \exists y. A \rightarrow (\forall x. M, V) \models \exists y. A$ כיון ו' ס' ג'ר'ג'ר'ס ס' ג'ר'ג'ר'ס
- 3)
- $M, V \models y = 13 \wedge x = 03 \neq A$ ג'ר'ג'ר'ס $V \models y = 13 \wedge x = 03$ ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס
 $M, V \models y = 13 \neq \forall x. A$ פ'ל' (1+0 ≠ 0) ג'ר'ג'ר'ס
 $V \models y = 13 \# \forall x. A$ פ'ל' $M, V \models y = 13 \wedge x = 03 \neq A$ ג'ר'ג'ר'ס $V \models y = 13 \wedge x = 03$ ג'ר'ג'ר'ס
 $M, V \models y = 03 \neq \forall x. A$ פ'ל' $M, V \models y = 03 \wedge x = 03 \neq A$ ג'ר'ג'ר'ס $V \models y = 03 \wedge x = 13$ ג'ר'ג'ר'ס
- (2) $M, V \not\models \exists y. \forall x. A \rightarrow (M, V) \not\models \forall x. A \wedge \forall y. A \vee \neg \forall y. A$ ס' ג'ר'ג'ר'ס
- $M, V \not\models (\forall x \exists y. A) \rightarrow (\exists y. \forall x. A)$ ג'ר'ג'ר'ס \rightarrow הוכחה של מילוי (2)-1 (1)-N
 $M, V \not\models y \in \emptyset \wedge \forall x. M \models x \in \emptyset$
- ב' פ'ל'
- $\varphi = (\forall x. A) \rightarrow (\exists x. A)$ ס' ג'ר'ג'ר'ס
 $\neg \varphi = \exists x. \neg A$ ג'ר'ג'ר'ס
- $V \models \neg \varphi$ מ'ג'ר'ג'ר'ס נ'ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס
(1) $M, V \not\models \exists x. A$ פ'ל' $M, V \models \forall x. A$ פ'ל' $M, V \not\models \varphi$ ג'ר'ג'ר'ס
- (2) $\neg \varphi \vdash \neg (\forall x. A) \rightarrow \neg (\exists x. A)$ ג'ר'ג'ר'ס $\vdash \neg (\forall x. A) \rightarrow \neg (\exists x. A)$ ג'ר'ג'ר'ס
 $\neg (\forall x. A) \vdash \exists x. \neg A$ ג'ר'ג'ר'ס $\vdash \exists x. \neg A \rightarrow \neg (\exists x. A)$ ג'ר'ג'ר'ס
 $\vdash \exists x. \neg A \rightarrow \neg (\exists x. A) \vdash \neg (\exists x. A)$ ג'ר'ג'ר'ס
- ב' פ'ל'
- $\varphi = (\exists x. A) \rightarrow (\forall x. A)$ ס' ג'ר'ג'ר'ס
 $\neg \varphi = \forall x. \neg A$ ג'ר'ג'ר'ס
- $D = \{1, 2\}$ מ'ג'ר'ג'ר'ס M ג'ר'ג'ר'ס $A = R(x)$ ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס
 $I[R] = \{1\}$ ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס I^{-1} ג'ר'ג'ר'ס
 $M, V \models \exists x. A \rightarrow (M, V \models x = 1 \models A)$ ג'ר'ג'ר'ס
 $(2) M, V \not\models \forall x. A \rightarrow (M, V \models x = 2 \not\models A)$ ג'ר'ג'ר'ס
 $M, V \not\models (\exists x. A) \rightarrow (\forall x. A)$ ג'ר'ג'ר'ס \rightarrow הוכחה של מילוי (2)-1 (1)-N
 $M, V \not\models \varphi \wedge \forall x. M \models x \in \emptyset$
- ב' פ'ל'
- $\varphi = (\exists x. (A \vee B)) \rightarrow (\exists x. A \vee \exists x. B)$ ס' ג'ר'ג'ר'ס
 $\neg \varphi = \forall x. \neg (\exists x. (A \vee B))$ ג'ר'ג'ר'ס
- $M, V \not\models \varphi \rightarrow V \models \neg \varphi$ מ'ג'ר'ג'ר'ס נ'ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס ג'ר'ג'ר'ס
 $M, V \not\models (\exists x. A \vee \exists x. B)$ פ'ל' $M, V \models \exists x. (A \vee B)$ ג'ר'ג'ר'ס

ב ה'ז (ו) נניח שקיים א�. מ, V \models (\exists x, A \vee \exists x, B) ו. נס'
 $\neg A, V \not\models \exists x, B$. כלומר $M, V \not\models \exists x, A$.

$M, V \models \forall x, a \not\models B$ ו. $M, V \models \forall x, a \not\models A$ אז $a \in D$. ב'ז. נס'
 $M, V \models \forall x, a \not\models A \vee B$ ב'ג'ז. נניח שקיים א�. מ, V \models \exists x, A \vee \exists x, B. נס'
 $(\exists x, A \vee \exists x, B) \models \neg (\exists x, A \vee \exists x, B)$ ב'ג'ז. נס' $a \in D$ ב'ג'ז.

ב סע'

$$\varphi = (\forall x, A) \rightarrow (\exists x, A)$$

הנחתה מילא גיאז.

ונניח $M, V \models \forall x, A$ כנחות ב'ג'ז. נס'
 $(\forall x, A) \models \neg (\forall x, A)$ ב'ג'ז. $M, V \models \exists x, A$ נס' $M, V \not\models \forall x, A$ ו. נס'

$M, V \not\models \exists x, A$ ב'ג'ז. נס' $M, V \models \exists x, A$ ו. נס'
 $M, V \models \forall x, A$ ב'ג'ז. נס' $a \in D$ ב'ג'ז. $M, V \models \forall x, A$ ו. נס'
 $M, V \models \forall x, A$ ב'ג'ז. נס' $a \in D$ ב'ג'ז. $M, V \models \forall x, A$ ו. נס'
 $(\forall x, A) \models \neg (\forall x, A)$ ב'ג'ז.

ב סע'

$$\varphi = (\exists x, A) \rightarrow (\forall x, A)$$

הנחתה מילא גיאז.

ונניח $M, V \models \exists x, A$ כנחות ב'ג'ז. נס'
 $(\exists x, A) \models \neg (\exists x, A)$ ב'ג'ז. $M, V \models \forall x, A$ נס' $M, V \not\models \exists x, A$ ו. נס'

$M, V \models \forall x, A$ ו. נס' $a \in D$ ב'ג'ז. נס' $M, V \models \forall x, A$ ו. נס'
 $a \in D$ ב'ג'ז. $M, V \models \forall x, A$ ו. נס' $M, V \models \exists x, A$ נס' $M, V \not\models \exists x, A$ ו. נס'
 $(\exists x, A) \models \neg (\exists x, A)$ ב'ג'ז.

ב סע'

הוכחה: כבש גורלה בפער. כי $M, V \models P(x) \rightarrow P(c)$ ו- $c \in I[P]$. אז $M, V \models \exists x P(x) \rightarrow P(c)$.

$I[c] = 3 \notin I[P]$ ו- $\exists x P(x) \models P(x) \text{ כיוון } c \in I[P]$ ו- $c \in I[c]$. לכן $M, V \models \exists x P(x) \neq P(c)$.

הוכחה: כבש גורלה בפער. כי $M, V \models \exists x P(x) \neq P(c)$ ו- $c \in I[P]$. אז $M, V \models \exists x P(x) \neq P(c) \rightarrow P(c)$.

בנ"ה

$$\varphi = \exists y (\forall x (q(x, y)) \rightarrow \forall x (\exists y (q(x, y))))$$

הוכחה: כבש גורלה בפער.

$$V \models \exists x_1 = a_3 \exists x_1 = b_3 = V \models x_1 = b_3$$

$$V \models \exists x_1 = a_3 \exists x_1 = b_3 = \boxed{\lambda y. \begin{cases} a & y = x \\ V[y] & o/w \end{cases}} \{x_1 = b_3\} =$$

$$= \lambda y. \begin{cases} b & y = x \\ V[y] & o/w \end{cases} = V \models x_1 = b_3$$

$$x \neq y \rightsquigarrow V \models \exists x_1 = a_3 \exists x_1 = b_3 = V \models y = b_3 \models x_1 = a_3 \text{ או } V \models y = b_3 \models x_1 = b_3$$

$$V \models \exists x_1 = a_3 \exists y_1 = b_3 = \boxed{\lambda z. \begin{cases} a & z = x \\ V[z] & o/w \end{cases}} \{y_1 = b_3\} =$$

$$= \lambda z. \begin{cases} a & z = x \\ b & z = y \\ V[z] & o/w \end{cases} = \boxed{\lambda z. \begin{cases} b & z = y \\ V[z] & o/w \end{cases}} \{x_1 = a_3\} =$$

$$= V \models y_1 = b_3 \models x_1 = a_3$$

הוכחה: כבש גורלה בפער.

$\vdash \exists y \forall x (q(x, y)) \vdash \exists y M$

$M, V \models \exists y \forall x (q(x, y)) \vdash M, V \models \exists y (q(x, y))$ ו-

$\vdash \exists y \forall x (q(x, y)) \vdash \exists y M$

$x = y \text{ או } *$

$y, V \models x_1 = a_3 \models \forall x q(x, y) \text{ ו- } a \in D \text{ כי } M, V \models \exists x \forall x q(x, x)$

$M, V \models x_1 = a_3 \models x_1 = b_3 \models q(x_1, x_1) \text{ או } b \in D \text{ כי } M, V \models \exists y M$

$b \in D$ (ב) $M, V \models X = b \vdash g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ
 $M, V \models X = b \vdash \exists x. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models X = b$ ו' (ב) 1-256
(ב) ב- D סבב, נניח שקיים x ב- D כך $X = x$

$M, V \models \forall x. \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models x = x$

$X = Y$ מ'גנ $M, V \models \forall x. \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models x = x$

$x \neq y$ סבב *

$\Rightarrow a \in D$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו a
 $b \in D$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו b
 $b \in D$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו b
 $U \models X = b \wedge Y = a \vdash g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models X = b \wedge Y = a \vdash g(x, y)$
 $b \in D$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו b
 $U \models X = b \vdash \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models X = b \vdash \exists y. g(x, y)$
 $U \models X = b \wedge Y = a \vdash g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models X = b \wedge Y = a \vdash g(x, y)$
 $M, V \models X = b \vdash \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models X = b \vdash \exists y. g(x, y)$

$X \neq Y$ מ'גנ $M, V \models P$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $U \models X = b \wedge Y = a \vdash g(x, y)$

האריך מ'גנ-X יתנו $M, V \models A$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו A סבב

(ב) End

$((\lambda x. b) x) A \rightarrow ((\lambda x. b) x) A = A$ סבב

האריך מ'גנ-X יתנו $I[g] = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\} = \emptyset$ סבב

$M, V \models X = -1 \vdash \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models X = -1 \vdash g(x, y)$

$M, V \models X = 1 \vdash \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models X = 1 \vdash g(x, y)$

$M, V \models X = 0 \vdash \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models X = 0 \vdash g(x, y)$

$M, V \models \forall x. \exists y. g(x, y) \Rightarrow (\exists y. g(x, y)) \vdash M, V \models X = 0 \vdash \exists y. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models X = 0 \vdash g(x, y)$

$M, V \models Y = -1 \neq \forall x. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models Y = -1 \neq g(x, y)$

$M, V \models Y = 1 \neq \forall x. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models Y = 1 \neq g(x, y)$

$M, V \models Y = 0 \neq \forall x. g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models Y = 0 \neq g(x, y)$

$M, V \models \forall x. \exists y. g(x, y) \Rightarrow (\exists y. g(x, y)) \vdash M, V \models Y = 0 \neq g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $M, V \models Y = 0 \neq g(x, y)$

$\exists y. g(x, y) \vdash M, V \models Y = 0 \neq g(x, y)$ (ב) 1-256 מ'גנ-X יתנו $Y = 0 \neq g(x, y)$

(ב) End

$$\varphi = \forall y. (e(f_2(x, y), z))$$

$$FV[\varphi] = \{x, z\} \quad \text{לפ' גורילה הדרישה}$$

$V[z] = V[x] = 0$ ו- V עליה f_2 לא מוגדר. הרווחה מוגדרת בפונקציית e .
 $\forall y. 0 * y = 0$ ו- y מוגדר בפונקציית e . הרווחה מוגדרת בפונקציית e .
 $V[z] = 1 - 1$ ו- $V[x] = 1$ ו- $y = z$ מוגדרות בפונקציית e .

$V[z] \neq 0$ ו- $V[x] \neq 0$ ו- V עליה f_2 מוגדרת בפונקציית e .
 $V[z] = 1 - 1$ ו- $V[x] = 1$ ו- $y = z$ מוגדרות בפונקציית e .
 $(\forall y. 1 * y = 1) \wedge (\forall y. 1 * y = 1)$

$$\varphi = e(c_0, f_1(x, y))$$

$$FV[\varphi] = \{x, y\} \quad \text{לפ' גורילה הדרישה}$$

13. $x = y$, $V[x] = V[y] = 0$ ו- V עליה f_1 מוגדרת.
 $0 = x + y \Rightarrow 0 = 0 + 0$ ו- $x + y$ מוגדר בפונקציית e .
 $x = y$ מוגדר בפונקציית e . (אנו גורילה הדרישה)

לפ' $V[x] \neq 0$ ו- $V[y] \neq 0$ ו- V עליה f_1 מוגדרת.
 $0 = x + y \Rightarrow 0 = 0 + 0$ ו- $x + y$ מוגדר בפונקציית e .
 $x = y$ מוגדר בפונקציית e . (אנו גורילה הדרישה)

$$\varphi = d(c_0, f_1(x, y))$$

$$FV[\varphi] = \{x, y\} \quad \text{לפ' גורילה הדרישה}$$

$V[y] \neq 0$ ו- $V[x] \neq 0$ ו- V עליה f_1 מוגדרת.
 $0 < 1 - 1$ ו- V עליה f_1 מוגדרת. $V[y] = 1 - 1$ ו- $V[x] = 1 - 1$.
 $d(c_0, f_1(x, y))$ מוגדר בפונקציית e .

14. $x = y$, $V[y] = V[x] = 0$ ו- V עליה f_1 מוגדרת.
 $0 < 0 + 0$ ו- $x + y$ מוגדר בפונקציית e .
 $x = y$ מוגדר בפונקציית e .

$$\varphi = \exists z. (\exists z. (e(c_0, z) \wedge e(f_2(z, z), z) \wedge e(x, f_2(y, z))))$$

$$FV[\varphi] = \{x\} \quad \text{לפ' גורילה הדרישה}$$

ר' סעיף ששהר. V עליה f_1 מוגדרת. V עליה e מוגדרת.
 e מוגדרת בפונקציית e . e מוגדרת בפונקציית e .
 $x = y$ מוגדר בפונקציית e . $x = y$ מוגדר בפונקציית e .
 $x = y \wedge z = 1 \Rightarrow x = y$. $x = y$ מוגדר בפונקציית e .
 $x = y \wedge z = 1 \Rightarrow z = 1$. $z = 1$ מוגדר בפונקציית e .

כלומר $x = y$.

לעומת

$M, V \not\models (\forall x(B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A)$ $\vdash \neg (\exists x B \rightarrow A) \vdash M, V \models \neg(\exists x B \rightarrow A)$ $\vdash M, V \models (\forall x B \rightarrow A)$ $\vdash M, V \models \forall x(B \rightarrow A) \vdash \text{true}$

$(\exists x, V \models A) \vdash M, V \models \exists x B \vdash (\exists x, M, V \models (\exists x B \rightarrow A) \vdash \text{true})$

(3) $M, V \models B \vdash V \models \neg \exists x \vdash M, V \models \neg \exists x B \vdash \neg \text{true}$
(4) $M, V \models A \vdash \text{true} \vdash A \models \neg \exists x \vdash \neg \exists x \vdash \neg \text{true}$

$M, V \models B \rightarrow A$ $\vdash \text{true} \vdash \neg \exists x \vdash \neg \exists x B \rightarrow A \vdash M, V \models \forall x(B \rightarrow A) \vdash \text{true}$

לעומת