

22/11/09

NOC - סעיפים 6

(Sturm)  $\rightarrow$  Ce se הדרוגה גן

(1)  $L[u] = a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0$

: Ce se הגדרה גן

je 6 יפ' (1) Ce se גן  $\rightarrow$  Ce se  $\phi_1 \neq 0$  $\phi_2(x)$  Ce se גן  $\phi_1$  פ'  $\phi_2(x)$  Ce se גן מוקם2 Ce se גן  $\rightarrow$  Ce se גן  $\rightarrow$  Ce se גן (Ce se גן מוקם)

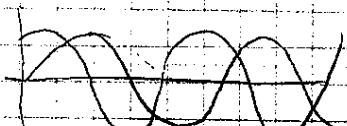
(1) Ce se גן (1.1)

Ce se גן מוקם בינו  $x_1, x_2$  ינ' ת'  $\phi_1(x)$  Ce se גן מוקם $\phi_2(x_2) \neq 0 \text{ or } \phi_2(x_1) \neq 0$ Ce se גן מוקם  $I = (x_1, x_2)$  Ce se גן מוקם  $\phi_2(x) = 0$ Ce se גן מוקם  $\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)' = \frac{\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'}{\phi_2^2} = -\frac{W(\phi_1, \phi_2; x)}{\phi_2(x)} \neq 0$ 

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi_1}{\phi_2} \right) = \frac{\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'}{\phi_2^2} = -\frac{W(\phi_1, \phi_2; x)}{\phi_2(x)} \neq 0 \rightarrow \phi_2 = \phi_1$$

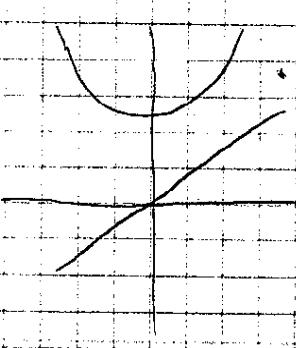
Ce se גן מוקם  $\phi_2$  Ce se גן מוקם  $\phi_2 \neq 0$  (W $\neq 0$  pr)Ce se גן מוקם  $x_2 - x_1 < \lambda$  Ce se גן מוקם  $\phi_1$  Ce se גן מוקם

NOC



$$\phi_1 = \sin x \quad \text{and} \quad y'' + y = 0$$

$$\phi_2 = \cos x \quad (n + \frac{1}{2})\pi$$

Ce se גן מוקם  $I$  Ce se גן מוקם  $\phi_2 = \phi_1$  Ce se גן מוקם (W $\neq 0$ )

$$\phi_1 = e^{nx} \quad y'' - y = 0$$

$$\phi_2 = e^{-nx}$$

Ce se גן מוקם  $\phi_2 = \phi_1$  Ce se גן מוקם (W $\neq 0$ )

$$u'' + q(x)u = 0 \quad \text{Ce se גן מוקם} \quad u'' - 4x^2 - 16 \quad (\text{W $\neq 0$ })$$

$$u = A(x)V \quad (2.3)$$

$$u' = A'V + AV'$$

$$u'' = A''V + 2AV' + AV''$$

$$AV'' + A''V + 2AV' + PAV' + P_1AV + P_2AV$$

$$u'' + P_1(x)u' + P_2(x)u = 0$$

(2.3), (2.3)

$$A + \frac{1}{2} A = 0$$

$$\frac{A'}{A} = -\frac{\rho}{2}$$

$$-\int \frac{\rho}{2} dx$$

$$A = e^{\int \frac{\rho}{2} dx}$$

$$v'' + \frac{1}{A} (A' + p_1 A' + p_2 A) v = 0$$

$$v'' + q(x)v = 0$$

$$2A + \rho A = 0 \quad \text{then } \rho$$

$\phi$ :  $y'' + p(x)y = 0$  le  $\psi$  יתגלו בהערך  $\psi - 1 \neq 0$

$$\psi: y'' + q(x)y = 0$$

$p(x) > q(x)$  ו $p(x) < 0$  בהערך  $\psi - 1 \neq 0$

$\phi$  le הערך  $\psi - 1$  el  $\psi$  le הערך  $\psi - 1$  בהערך

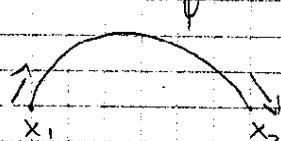
( $\phi''(x) < 0$ )

הערך  $\psi - 1$   $\phi$  הערך  $\psi - 1$  הערך

הערך  $\phi$  הערך  $\psi$  le הערך  $x_2 - x_1$  הערך

הערך הערך  $\psi - 1$   $\phi$   $x_1, x_2$  הערך  $x_2 - x_1$  הערך

$$\begin{cases} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{cases} = w(\phi, \psi; x_i) = \phi(x_i)\psi'(x_i) \geq 0$$



$$w(\phi, \psi; x_2) = \phi(x_2)\psi'(x_2) \leq 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} (\phi, \psi; x) = \phi\psi'' - \phi''\psi = \phi\psi(p-q) \geq 0$$

$\phi(x_1) = 0$  כהערך  $x_2 - x_1$   $x_1$  יהערך הערך  $\phi$  הערך, הערך

$\psi$  הערך הערך  $\phi$  le הערך הערך 'ס הערך הערך הערך

$$(1) \quad y'' + x^2 y = 0 \quad (1) : \text{sw}_13$$

$[1, \infty)$  le הערך  $\infty$  el הערך הערך

$$y'' + y = 0 \quad x = R\bar{i}\theta, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

le הערך הערך הערך  $(1) : \text{sw}_13$   $(1, \infty)$   $x \geq 1 - e^{-\frac{x^2}{4}}$

$$y'' + x^2 y + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

$$R\bar{i}\theta, \quad (k+1)\bar{i}\theta, \quad 1/2$$

Bessel הערך  $(2) : l_{1, \nu_2}$

$$(*) u'' + \left(1 + \frac{1-4v^2}{x^2}\right) u = 0$$

$$u'' + u = 0$$

ר' (ב) פ' (ג)

$$u = \sin(x-\alpha)$$

$$\frac{1-4v^2}{x^2}$$

$$\left(1 + \frac{1-4v^2}{x^2}\right) = 1 - \frac{4v^2}{x^2} < 1$$

לפ' ר' (ב) פ' (ג)  $v = 1 \Rightarrow 1 - \frac{4}{x^2} > 1 \Rightarrow v < \frac{1}{2}$

לפ' ר' (ב) פ' (ג)  $v = 1 \Rightarrow 1 - \frac{4}{x^2} < 1 \Rightarrow v > \frac{1}{2}$

$$y = \frac{\sin(x-\alpha)}{\sqrt{x}}$$

$$v = \frac{1}{2}$$

לפ' ר' (ב) פ' (ג)  $v < 1 \Rightarrow 1 - \frac{4}{x^2} > 1 \Rightarrow v > \frac{1}{2}$

לפ' ר' (ב) פ' (ג)  $v > 1 \Rightarrow 1 - \frac{4}{x^2} < 1 \Rightarrow v < \frac{1}{2}$

סינוס פ'

$$\text{ר' (ב) } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$(1) P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad \exists r > 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x-x_0)^n$$

ר' (ב) פ' (ג) סדרה כפולה

ר' (ב) פ' (ג) סדרה כפולה  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$  סדרה נס

ר' (ב) פ' (ג) סדרה כפולה  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = l$$

ר' (ב) פ' (ג)  $l = 1 \Rightarrow \exists r > 0$  סדרה נס  $|x-x_0| < r$

ר' (ב) פ' (ג) סדרה נס  $|x-x_0| < r$

ר' (ב) פ' (ג) סדרה נס  $|x-x_0| > r$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

ר' (ב) פ' (ג)

$$f \cdot g = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad c_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} := \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$$

ר' (ב) פ' (ג)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  if and only if  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  such that  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Def:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$  is called a Taylor series of  $f(x)$  at  $x_0$ .

$f, g \rightarrow f+g$  is continuous at  $x_0$  if  $f, g$  are continuous at  $x_0$ .

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$  is continuous at  $x_0$  if  $f_1, f_2$  are continuous at  $x_0$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  if and only if  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  such that  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0 \Rightarrow 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} < \epsilon$  if  $\delta < \frac{1}{\epsilon}$ .

$(\sim C_f)_0$  if  $f$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  if  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

$x \neq x_0 \Rightarrow R - Q, P - L$  if  $R, Q, P, L$  exist.

$P(x_0) \neq 0$  if  $(1) \quad f(x) = P(x) + Q(x)$  for  $x = x_0$  is true:

$\frac{R}{P} > \frac{Q}{P} \Rightarrow Q \neq 0$  since  $x_0$  is a root of  $\sim P$ .

$$(1) \quad P \leftarrow y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$y'(x_0) = y_0, y(x_0) = y_0$  since  $y$  is continuous at  $x_0$ .

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

$$P=1, R=1, Q=0 \quad \therefore y'' + y = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad ; (1) \quad \text{true}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{if } a_0 \neq 0 \Rightarrow y(0) = a_0 \neq 0 \quad \text{if } a_0 = 0 \Rightarrow y(0) = 0$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

For  $n=1$ :  $2a_2 + a_0 = 0$   
 $n=2$ :  $6a_3 + a_1 = 0$   
 $n=3$ :  $12a_4 + a_2 = 0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

$$n=0: 2a_2 + a_0 = 0$$

$$n=1: 3a_3 + a_1 = 0$$

$$4a_4 + a_2 = 0$$

$$n=2: 5a_5 + a_3 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = +\frac{a_0}{4!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5 \cdot 6} = -\frac{a_0}{6!}$$

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$$

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$$

$$y = a_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] + a_1 \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right]$$

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

$$y_1(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$y(x=0) = a_0$$

$$y'(x=0) = a_1$$

$$\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x=0) = 1 \\ y_1'(x=0) = 0 \end{cases}$$

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$$