11.1.09 (1) סטטיסטיקה - שיעור 10

בדיקת השערות

הגדרות: - סוגי השערות: פשוטה מול מורכבת

- סוגי טעות: סוג I, סוג II, עוצמה

- מבחנים בעלי עוצמה מקסימלית להשערה פשוטה (MP)

⇐ הלמה של ניימן-פירסון.

אם אנחנו רוצים לבדוק $\mathcal{H}_0:\theta=\theta_0$, $\mathcal{H}_A:\theta=\theta_A$

על פי מדגם מקרי בגודל n.

אזי מבחן MP יאמר אזור דחיה C^*_α רק אם: $C^*_\alpha=\{\Lambda(\underline{X})\le d^*_\alpha\}$

כאשר $\Lambda(\underline{X})=\frac{f_{\theta_0}(\underline{X})}{f_{\theta_A}(\underline{X})}$ (יחס הנראות).

הראינו למקרה הנורמלי, כלומר $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 ידוע $H_0:\mu=\mu_0$, $H_A:\mu>\mu_0$

ש- $\Lambda(\underline{X})$ הוא פונ' יורדת של $\bar{X}$ ולכן מבחן MP עפ"י N-P:

נדחה H_0 ⇔ $\bar{X}\ge Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0$.

הוכחת הלמה של N-P

נתונים: $\begin{cases}\mathcal{H}_0:\theta=\theta_0\\ \mathcal{H}_A:\theta=\theta_A\end{cases}$ עפ"י מדגם בגודל n

לא מבטיח שלא יהיה מבחן של פני יותר שיהיה

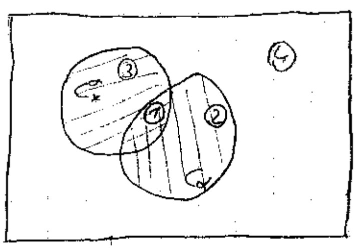
המבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמה α הוא:

נדחה $\mathcal{H}_0$ ⇔ $\Lambda(\underline{X})\le d^*_\alpha$ כאשר d^*_α נקבע כך $P_{H_0}(\Lambda(\underline{X})\le d^*_\alpha)=\alpha$

הוכחה: $C^*_\alpha=\{\underline{X}: \frac{f_{\theta_0}(\underline{X})}{f_{\theta_A}(\underline{X})}\le d\}$ ונניח $P_{H_0}(\underline{X}\in C^*_\alpha)=\alpha$.

יהי C_α אזור דחיה אחר ברמה α, כלומר $P_{H_0}(X\in C_\alpha)=\alpha$.

נסתכל על שתי הדגמות גרפית של היחס בין C_α , C^*_α:



	$\underline{X}\in C^*_\alpha$	$\underline{X}\notin C^*_\alpha$
$\underline{X}\in C_\alpha$	(1) שניהם ידחו את H_0	(2) NP לא ידחה את H_0, C_α כן ידחה
$\underline{X}\notin C_\alpha$	(3) מבחן NP ידחה את H_0, C_α לא ידחה	(4) שניהם לא ידחו

לפי ההגדרות,

$$\alpha=P_{H_0}(\underline{X}\in C^*_\alpha)=P_{H_0}\underbrace{(\underline{X}\in C^*_\alpha\cap\underline{X}\in C_\alpha)}_{1}+P_{H_0}\underbrace{(\underline{X}\in C^*_\alpha\cap\underline{X}\notin C_\alpha)}_{3}$$

$$\alpha=P_{H_0}(\underline{X}\in C_\alpha)=P_{H_0}\underbrace{(\underline{X}\in C^*_\alpha\cap\underline{X}\in C_\alpha)}_{1}+P_{H_0}\underbrace{(\underline{X}\notin C^*_\alpha\cap\underline{X}\in C_\alpha)}_{2}$$

$\Rightarrow P_{H_0}(2)=P_{H_0}(3)$

עוצמה $C^*_\alpha = P_{H_A}(X\in C^*_\alpha) = P_{H_A}(\underbrace{\bar X\in C^*_\alpha \cap \bar X\in C_\alpha}_{①}) + P_{H_A}(\underbrace{\bar X\in C^*_\alpha \cap \bar X\notin C_\alpha}_{③})$

עוצמה $C_\alpha = P_{H_A}(X\in C_\alpha) = P_{H_A}(\underbrace{\bar X\in C^*_\alpha \cap \bar X\in C_\alpha}_{①}) + P_{H_A}(\underbrace{\bar X\notin C^*_\alpha \cap \bar X\in C_\alpha}_{②})$

$$\underset{(\text{עוצמת } C^*_\alpha)}{P_{H_A}(X\in C^*_\alpha)} - \underset{(\text{עוצמת } C_\alpha)}{P_{H_A}(X\in C_\alpha)} = \cancel{P_{H_A}(①)} + P_{H_A}(③) - \cancel{P_{H_A}(①)} + P_{H_A}(②) =$$

$$= P_{H_A}(\underbrace{\bar X\in C^*_\alpha \cap \bar X\notin C_\alpha}_{③}) - P(\underbrace{\bar X\notin C^*_\alpha \cap \bar X\in C_\alpha}_{②}) \geqslant$$

הגדרת C^*_α: $\left\{X : \frac{f_{\theta_0}(X)}{f_{\theta_A}(X)} \le d^*_\alpha\right\}$ (כלומר אם $X\notin C^*_\alpha$ אזי בהכרח $\frac{f_{\theta_A}(X)}{f_{\theta_0}(X)} > d^*_\alpha$)

$$\Rightarrow P_{H_A}(③) = \int_{\substack{X\in C^*_\alpha\\ X\notin C_\alpha}} f_{\theta_A}(X)\,dx \underset{\uparrow}{\geq} \frac{1}{d^*_\alpha}\int_{\substack{X\in C^*_\alpha\\ X\notin C_\alpha}} f_{\theta_0}(X)\,dx$$

$f_{\theta_A}(X) \geq \frac{f_{\theta_0}(X)}{d}$

(כיון שנמצא בתחום C^*_α)

$$P_{H_A}(②) = \int_{\substack{X\notin C^*_\alpha\\ X\in C_\alpha}} f_{\theta_A}(X)\,dx < \frac{1}{d^*_\alpha}\int_{\substack{X\notin C^*_\alpha\\ X\in C_\alpha}} f_{\theta_0}(X)\,dx$$

$$\geqslant \frac{1}{d^*_\alpha}\Big(\underbrace{P_{H_0}(③)}_{\alpha - P_{H_0}(1)} - \underbrace{P_{H_0}(②)}_{\alpha - P_{H_0}(1)}\Big) = 0$$

מש"ל

מבחנים בעלי עוצמה מקסימלית לפי N-P

א. נורמלי עם שונות ידועה.
ב. נורמלים עם שונות לא ידוע.
ג. ברנולי / בינומי
ד. פואסון.

א. נורמלי עם שונות ידועה: $H_0: \mu=\mu_0$, $H_A: \mu=\mu_A$ (שונות σ^2 , n תצפיות) $(\mu_A>\mu_0)$.

$$\Lambda(X) = \ldots = \underbrace{\frac{\exp\{-n\mu_0^2/2\}}{\exp\{-n\mu_A^2/2\}}}_{\text{לא תלוי ב-}X} \exp\left\{\frac{n\bar X(\mu_A-\mu_0)}{\sigma^2}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Lambda(X)}{\partial \bar X} > 0 \Rightarrow$$

$\hookrightarrow (*)$

אזור דחייה N-P

$$C^\alpha_\alpha = \left\{\bar X : \bar X \geq \mu_0 + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt n}\right\}$$

מה קורה אם $H_A: \mu=\mu_A$ $(\mu_A<\mu_0)$

$\hookrightarrow (*)$: $C^\alpha_\alpha = \left\{\bar X : \bar X < \mu_0 - Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt n}\right\}$

ב. נורמל עם שונות σ^2 לא ידועה , $H_0: \mu=\mu_0$, $H_A: \mu=\mu_A$ $(\mu_A>\mu_0)$

$\Leftarrow$ יחס הנראות עדיין מונוטוני ב-$\bar X$ $\Leftarrow$ $C^*_\alpha = \left\{\bar X : \bar X \geq \mu_0 + t_{n-1,1-\alpha}\frac{\hat\sigma}{\sqrt n}\right\}$

(כאשר כרגיל $\hat\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar X)^2$)

ב*. $H_A: \mu=\mu_0$, $(\mu_A<\mu_0)$ $\qquad C^*_\alpha=\{\bar{x}:\bar{x}\le\mu_0-t_{n-1,1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\}$

ג. ברנולי $X_i\sim Bern(p)$

$H_0: p=p_0$, $H_A: p=p_A$ $\quad (p_A>p_0)$

$$f_{p_0}(\underline{x})=p_0^{\sum x_i}(1-p_0)^{n-\sum x_i}$$
$$f_{p_A}(\underline{x})=p_A^{\sum x_i}(1-p_A)^{n-\sum x_i}$$

(*) זה נותן: שמים את המקרה הבינומי כי לא שמים לב, זה לא ישפיע על המסקנה הסטטיסטית שלנו כי איך נותני פונקציות תחת H_0 וגם תחת H_A.

$$\Lambda(\underline{x})=\left(\frac{p_0}{p_A}\right)^{\sum x_i}\left(\frac{1-p_0}{1-p_A}\right)^{n-\sum x_i}=\left(\frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)}\right)^{n\hat{p}(=\sum x_i)}\cdot\left(\frac{1-p_0}{1-p_A}\right)^n$$

$$\log\Lambda(\underline{x})=n\hat{p}\log\left(\frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)}\right)+n\log\left(\frac{1-p_0}{1-p_A}\right)$$

$$\frac{\partial\log\Lambda(\underline{x})}{\partial\hat{p}}=n\underbrace{\log\left(\frac{\overset{\wedge}{p_0}\,\overset{\wedge}{(1-p_A)}}{p_A\,(1-p_0)}\right)}_{\hat{0}}<0$$

⇐ מבחן N-P ל- $H_0: p=p_0$, $H_A: p=p_A$ $(p_A>p_0)$ הוא מהצורה $C^*_\alpha\{\underline{x}:\hat{p}\ge d^*_\alpha\}$.

איך קובעים את גודל הדחייה? (מוצאים את d^*_α)

1. נקבע d כלשהו ונאמר: המבחן שדוחה את $\hat{p}\ge d$ הוא מבחן בעל עוצמה מקסימאלית ברמה $P_{H_0}(\hat{p}\le d)$.

$$P_{H_0}(\hat{p}\ge d)=P_{H_0}(\sum X_i\ge dn)=\sum_{z=\lceil nd\rceil}^{n}P_{H_0}(\sum X_i=z)=\sum_{z=\lceil nd\rceil}^{n}\binom{n}{z}p_0^z(1-p_0)^{n-z}$$

2. (דרך) נקבל את α להשתמש בקירוב (נרמלי) ולכן נקבל: $\hat{p}\overset{\cdot}{\underset{H_0}{\sim}}N\left(p_0,\frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

$$C^*_\alpha=\left\{\underline{x}:\hat{p}\ge p_0+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\}\Rightarrow$$
מבחן בעל עוצמה מקסימאלית ברמה "בקירוב" α.

ד. פואסוני $X\sim Pois(\lambda)$

$H_0:\lambda=\lambda_0$, $H_A:\lambda=\lambda_0$ $\quad(\lambda_A>\lambda_0)$

[הערה: סכום פואסונים מתפלג פואסוני. לכן, שקול להגיד: נניח $Y_i\sim Pois(\delta)$ וצריך לבדוק $H_0:\delta=\delta_0$, $H_A:\delta=\delta_A$ (לפי מדגם בגודל n)
או להגיד: נניח $X=\sum_{i=1}^n Y_i$ ואז $X\sim Pois(\lambda)$
$H_0:\lambda=n\delta_0$, $H_A:\lambda=n\delta_A$]

$$\Lambda(x)=e^{-(\lambda_A-\lambda_0)}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_A}\right)^x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(\Lambda(\underline{x}))=\log\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_A}\right)<0$$

⇐ אזור דחייה למבחן עוצמה מקסימלית $C^*_\alpha=\{x:x\ge d^*_\alpha\}$

סוף
במבחן יכול להיות מקרים כמו זה לא ברור ומה?

הכללת N-P: מבחנים בעלי עוצמה מקסימלית במידה שווה (UMP)
uniformly most powerful

נניח שאנו רוצים לבחון: $H_0:\theta=\theta_0$, $H_A:\theta\in\Theta_A$

אזור דחייה C^*_α מגדיר מבחן ברמת מובהקות α בעל עוצמה מקסימלית במידה שווה אם:

א. $P_{H_0}(\underline{X}\in C^*_\alpha)=\alpha$

ב. C^*_α מגדיר מבחן בעל עוצמה מקסימלית עבור כל אלטרנטיבה פשוטה $H_A:\theta=\theta_A,\ \forall\theta_A\in\Theta_A$

דוגמאות

1. נורמלית, שונות ידועה $H_0:\mu=\mu_0$, $H_A:\mu>\mu_0$, $\Theta_A=\{\mu:\mu>\mu_0\}$

במקרה הפשוט: $H_A:\mu=\mu_A\ (\mu_A>\mu_0)$ קיבלנו לפי N-P אזור דחייה שאינו תלוי ב-μ_A

$$C^*_\alpha=\{\underline{X}:\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$$

כיוון שאינו תלוי ב-μ_A, הוא בעל עוצמה מקסימלית לכל: $\mu_A\in\Theta_A=\{\mu:\mu>\mu_0\}$
$\Leftarrow$ C^*_α נותן UMP.

(ב.-ג.) באופן דומה, המבחנים שעשינו בשיעור הקודם הם UMP עבור השערות מורכבות חד צדדיות למקרים:
- נורמלי, σ^2 לא ידוע.
- בינומי
- פואסוני

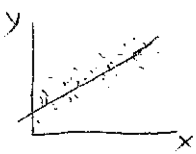
במקרה הדו-צדדי: מבחן MP תלוי בכיוון האלטרנטיבה הפשוטה. לכן אם Θ_A כוללת את שני הכיוונים אין UMP. (למשל עבור: $H_0:\mu=\mu_0$, $H_A:\mu\neq\mu_0$).

הסקה סטטיסטית בבעיות רגרסיה

נזכר בבעית הרגרסיה:

א. נתונות תצפיות $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$

ב. מחפשים קו: $\hat{y}=a+bx$



ג. הדרך המקובלת: ריבועים פחותים:
נגדיר: $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$

ונגדיר: $\hat{a}_{LS},\hat{b}_{LS}$ כערכים שמביאים את $f(a,b)$ למינימום.

ניתן לחשוב על הבעיה כבעית אמידה של a,b.

- a,b הם הפרמטרים שאומדים
- מהו התיאור של התופעה, התפלגות, פרמטרים שמתאימים כדי לתאר את מקרית $\hat{a}_{LS}$, $\hat{b}_{LS}$ כבעית אמידה פורמלית?

11.1.09 5

סטטיסטיקה - שיעור 10

<u>תשובה:</u> אנחנו מנסים לעשות הסקה סטטיסטית לגבי ההתפלגות <u>המותנה</u> $P(Y|X)$;

<u>נניח:</u> $Y|X=x \sim N(a+bx, \sigma^2)$, σ^2 לא ידוע.
במילים אחרות: $Y=a+bx+\varepsilon$ כאשר $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$. (מודל)

ואנחנו רוצים לעשות הסקה סטטיסטית לגבי a,b על פי מדגם מקרי בגודל n:

$(x_1,y_1), \ldots\ldots, (x_n,y_n)$.

איך אפשר לאמוד את a,b? נראות מקסימלית.

$$L(a,b;(x_1,y_1)\ldots(x_n,y_n),\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y_i-a-bx_i)^2}{2\sigma^2}}=$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$l(a,b;\ldots)=\underbrace{-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)}_{\text{לא תלוי ב } a,b}-\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{f(a,b)}_{\text{סכום ריבועי השגיאות}}$$

l מכיל את $f(a,b)$ בסימן מינוס ⇐ להביא למקסימום את l שקול להביא למינימום את $f(a,b)$.

⇐ א.נ.מ

$$\widehat{(a,b)}=\underset{a,b}{\operatorname{argmin}}\, f(a,b)$$

נזכר בפתרון שראינו בעבר:

$$\hat{b}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \qquad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$$

(2) לא הוכחה

מודל: $Y_i=a+bx_i+\varepsilon_i$, $\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$.

מאחר שאנחנו במסגרת של הסקה סטטיסטית, מה עוד אנחנו רוצים לעשות?

- לעשות רווחי סמך ל- a,b על סמך $\hat{a},\hat{b}$.
- לבדוק השערות על a,b.

ההשערה "הקלאסית" במקרה הזה: $H_0: b=0$, $H_A: b\neq 0$.

כדי לבצע הסקה זו, נשאל את עצמנו לגבי התפלגות $\hat{b}$:

$$\hat{b}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i-\underbrace{\boxed{\sum(x_i-\bar{x})}}_{=\sum x_i-n\bar{x}=0}\cdot\bar{y}}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(a+bx_i+\varepsilon_i)}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$=\frac{\cancel{a\sum(x_i-\bar{x})}+b\sum x_i(x_i-\bar{x})+\sum\varepsilon_i(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$E(\hat{b})=b\underbrace{\frac{\sum x_i(x_i-\bar{x})}{\sum x_i(x_i-\bar{x})^2}}_{1}+\underbrace{E\left[\frac{\sum\varepsilon_i(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]}_{\text{לפי המשך שלו } \forall i\, E(\varepsilon_i)=0}\Rightarrow(=0)$$

$$\sum x_i(x_i-\bar{x})=\sum x_i^2-(\sum x_i)\bar{x}=\sum x_i^2-n\bar{x}^2=\sum(x_i-\bar{x})^2$$

$\Rightarrow E(\hat{b})=b \Rightarrow$ $\hat{b}$ אומד חסר הטיה ל- b

לאחר עוד חישובים שלא נראה כאן, נקבל $\hat{b}\sim N\left(b,\frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$.

סטטיסטיקה - שיעור 10

איך נבחן שיפוע:

$H_0: b=0 \quad , \quad H_A: b\neq 0$

התפלגות $\hat{b}$: $\hat{b} \overset{H_0}{\sim} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right)$

$\hat{b} \overset{b=b_0}{\sim} N\left(\hat{b}, \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right)$

אומד חסר הטיה ל- σ^2: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2$

⇐ נבנה רח"ס לבדיקת השערה כיוונית:

$$C_\alpha^* = \left[-t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})}}{\sqrt{n}}, \; t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}/\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{n}}\right]$$