

$$1. (t) \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin^2 t & \cos^2 t \\ -2\sin 2t & 2\sin t \cdot \cos t \\ & = \sin 2t & = -\sin 2t \\ -4\cos 2t & 2\cos 2t & -2\cos 2t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin^2 t & \cos^2 t \\ -2\sin 2t & \sin 2t & -\sin 2t \\ -4\cos 2t & 2\cos 2t & -2\cos 2t \end{vmatrix}$$

$$= \cos 2t \begin{vmatrix} \sin 2t & -\sin 2t \\ 2\cos 2t & -2\cos 2t \end{vmatrix} - (-2\sin 2t) \begin{vmatrix} \sin^2 t & \cos^2 t \\ 2\cos 2t & -2\cos 2t \end{vmatrix}$$

$$+ (-4\cos 2t) \begin{vmatrix} \sin^2 t & \cos^2 t \\ \sin 2t & -\sin 2t \end{vmatrix}$$

$$= \cos 2t (-2\cos 2t \cdot \sin 2t + \sin 2t \cdot \cos 2t \cdot 2) + 2\sin 2t (-2\cos 2t \cdot \sin^2 t - 2\cos 2t \cdot \cos^2 t) - 4\cos 2t (-\sin 2t \cdot \sin^2 t - \sin 2t \cdot \cos^2 t)$$

$$= -4\sin 2t \cos 2t (\sin^2 t + \cos^2 t) + 4\cos 2t \sin 2t (\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= -4\sin 2t \cos 2t + 4\cos 2t \sin 2t = 0$$

הערות: הערות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

$$\sin \neq W=0$$

(הערות)

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

2

$$\begin{aligned}
 (b) \quad W &= \begin{vmatrix} 1 + \cos 2t & \cos^2 t \\ -2 \sin 2t & -2 \cos t \cdot \sin t \end{vmatrix} = \\
 &= (1 + \cos 2t)(-2 \cos t \cdot \sin t) - (\cos^2 t)(-2 \sin 2t) \\
 &= (2 \cos^2 \frac{2t}{2})(-\sin 2t) - 2 \cos^2 t \cdot (-\sin 2t) \\
 &= (-\sin 2t)(2 \cos^2 t - 2 \cos^2 t) = \underline{0} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

"
 כן
 ה"ה נסקרו מה 0-
 ולכן 2 הפונקציות
 תלויות ליניארית

$$\begin{aligned}
 (d) \quad W &= \begin{vmatrix} e^{2t} \cos \mu t & e^{2t} \sin \mu t \\ \lambda e^{2t} \cos \mu t + e^{2t}(-\sin \mu t) \cdot \mu & \lambda e^{2t} \sin \mu t + e^{2t} \cos \mu t \cdot \mu \end{vmatrix} \\
 &= \lambda e^{2 \cdot 2t} \cos \mu t \cdot \sin \mu t + e^{2t} \cos^2 \mu t \cdot \mu - \lambda e^{2 \cdot 2t} \cos \mu t \cdot \sin \mu t + e^{2t} \sin^2 \mu t \cdot \mu \\
 &= e^{2 \cdot 2t} \cos^2 \mu t \cdot \mu + e^{2t} \sin^2 \mu t \cdot \mu \\
 &= e^{2 \cdot 2t} \cdot \mu (\cos^2 \mu t + \sin^2 \mu t) \\
 &= \frac{e^{2 \cdot 2t}}{0} \cdot \frac{\mu}{0} \neq 0
 \end{aligned}$$

כן
 $W \neq 0 \Rightarrow$ "הן
 תלויות ליניארית

קובעו כי $W \neq 0$ ולכן הפונקציות תלויות ליניארית

$$(r) \quad W = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{3(t-1)} \\ 3e^{3t} & 3 \cdot e^{3(t-1)} \end{vmatrix} = 3e^{3t} \cdot e^{3t-3} - 3 \cdot e^{3t} \cdot e^{3t-3} \stackrel{כן}{=} 0 \Rightarrow W=0 \text{ ולכן }$$

הפונקציות תלויות ליניארית

$$(g) \quad W = \begin{vmatrix} 1 & e^{3t} & e^{-3t} \\ 0 & 3e^{3t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 9e^{3t} & 9e^{-3t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3e^{3t} & -3e^{-3t} \\ 9e^{3t} & 9e^{-3t} \end{vmatrix} = 27e^{3t-3t} + 27e^{3t-3t} = 54$$

כן
 $W \neq 0$ ולכן הפונקציות
 תלויות ליניארית

$$2. (b) \quad x_1(t) = \frac{1}{t} \quad 2t^2 x'' + t x' - 3x = 0$$

$$x_1(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow x_1'(t) = -\frac{1}{t^2}, \quad x_1''(t) = \frac{2}{t^3}$$

$$2 \cdot t^2 \cdot \frac{2}{t^3} + t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) - 3 \cdot \frac{1}{t} = 4 \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{t} - 3 \cdot \frac{1}{t} = 0 \quad \checkmark$$

$$x_2' = v'(t) \cdot \frac{1}{t} - v(t) \cdot \frac{1}{t^2} \quad , \text{לכן} \quad x_2 = v(t) \cdot x_1 = v(t) \cdot \frac{1}{t} \quad \text{לכן}$$

$$\begin{aligned} x_2'' &= v''(t) \cdot \frac{1}{t} - v'(t) \cdot \frac{1}{t^2} - v'(t) \cdot \frac{1}{t^2} + v(t) \cdot 2 \cdot \frac{1}{t^3} \\ &= v'' \cdot \frac{1}{t} - 2v' \cdot \frac{1}{t^2} + 2v \cdot \frac{1}{t^3} \end{aligned}$$

$$2t^2 \left(v'' \cdot \frac{1}{t} - 2v' \cdot \frac{1}{t^2} + 2v \cdot \frac{1}{t^3} \right) + t \left(v' \cdot \frac{1}{t} - v \cdot \frac{1}{t^2} \right) - 3 \cdot v \cdot \frac{1}{t} = 0 \quad \text{לכן}$$

$$2tv'' - 4v' + 4v \cdot \frac{1}{t} + v' - v \cdot \frac{1}{t} - 3 \cdot v \cdot \frac{1}{t} = 0$$

$$2tv'' - 3v' = 0$$

$$v'' - \frac{3}{2t} v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = \frac{3}{2t} \Rightarrow \ln v' = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t} dt = \ln t^{\frac{3}{2}}$$

$$v' = t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int v' dt = \int t^{\frac{3}{2}} dt + \int C dt \Rightarrow v = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C_1 t + C_2$$

$$x_2 = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{t} + C_1 \cdot \frac{1}{t} + C_2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{2}{5} t^{\frac{3}{2}} + C_1 + \frac{C_2}{t} \quad \text{לכן}$$

$$x_1 = \frac{1}{t}$$

$$x_2 = \frac{2}{5} t^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2$$

$$x = \bar{c}_1 \cdot \frac{1}{t} + \bar{c}_2 \cdot t^{\frac{3}{2}} \quad \checkmark$$

$$2. (a) (t^2+1)x'' - 2tx' + 2x = 0 \quad x_1 = t$$

$$(t^2+1) \cdot 0 - 2t \cdot 1 + 2t = 0 \quad \checkmark$$

הצגת פתרון x_1 כן נכונה

$$\text{לכן} \quad x_2 = V(t) \cdot x_1 = t \cdot V(t) \quad \text{נניח}$$

$$x_2' = t \cdot V' + V$$

$$x_2'' = t \cdot V'' + 2V'$$

$$(t^2+1) \cdot (tV'' + 2V') - 2t(tV' + V) + 2tV = 0$$

הצגת פתרון x_2 כן נכונה

$$t^3 \cdot V'' + 2t^2 V' + tV'' + 2V' - 2t^2 V' - 2tV - 2tV = 0$$

$$(t^3+t)V'' + 2V' = 0$$

$$\int \frac{V''}{V'} dt = \int \frac{-2}{t^3+t} dt = \int \frac{-2}{t(t^2+1)} dt = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-2t}{t^2+1} dt$$

$$\ln|V'| = -2 \ln|t| + \ln|t^2+1| + C_1$$

$$V' = C_2 \frac{t^2+1}{t^2} = \frac{C_2}{t^2} + C_2$$

$$\int V' dt = \int \frac{C_2}{t^2} dt + \int C_2 dt$$

$$\boxed{V = -C_2 t^{-1} + C_2 t + C_3}$$

$$\frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1} = \frac{a(t^2+1) + (bt+c)t}{t(t^2+1)}$$

$$= \frac{(a+b)t^2 + ct + a}{t(t^2+1)} = \frac{2}{t(t^2+1)}$$

$$a=2$$

$$a+b=0 \Rightarrow b=-2$$

$$c=0$$

$$x_2 = t \cdot (-C_2 t^{-1} + C_2 t + C_3) = C_2 t^2 + C_3 t - C_2$$

לכן

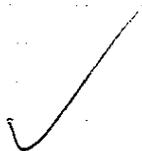
$$x_1 = t$$

$$\Rightarrow x = \bar{C}_1 x_1 + \bar{C}_2 x_2$$

$$x_2 = t^2 - 1$$

$$C_2 = 1, C_3 = 0 \quad \text{נניח}$$

$$\boxed{x = \bar{C}_1 t + \bar{C}_2 (t^2 - 1)}$$



$$3. (k) \quad X'' + \frac{2}{t} X' + X = 0 \quad X_1 = \frac{\sin t}{t}$$

$$\Leftrightarrow X_1' = \cos t \cdot \frac{1}{t} - \sin t \cdot \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow X_1 = \frac{\sin t}{t} \quad \text{ilw}$$

$$X'' = (-\sin t) \cdot \frac{1}{t} - \cos t \cdot \frac{1}{t^2} - \cos t \cdot \frac{1}{t^2} + 2 \sin t \cdot \frac{1}{t^3}$$

$$-\frac{\sin t}{t} - 2 \frac{\cos t}{t^2} + 2 \frac{\sin t}{t^3} + \frac{2}{t^3} \cos t - \frac{2}{t^3} \sin t + \frac{\sin t}{t} = 0 \quad \checkmark$$

$$W' - \frac{2}{t} W = 0 \quad \left| \quad W = A \cdot e^{\int \left(\frac{2}{t} - \frac{2}{t} \right) dt} = A \cdot e^{-2(\ln t - \ln t_0)} \right.$$

$$W = A \cdot t^{-2} \quad \text{to } t_0 = 1 \text{ } \checkmark$$

$$X_1 \cdot X_2' - X_1' \cdot X_2 = \frac{\sin t}{t} \cdot X_2' - \frac{\cos t}{t} \cdot X_2 + \frac{\sin t}{t^2} \cdot X_2 = A \cdot t^{-2} \quad \left(\frac{1}{\sin t} \text{ } \checkmark \right)$$

$$X_2' + \left(\frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t} \right) X_2 = A \frac{1}{t \sin t}$$

$$u(t) = e^{-\int \frac{X_1'}{X_1} dt} = e^{-\ln |X_1|} = \frac{1}{X_1} = \frac{t}{\sin t} \quad \text{integrate } \checkmark$$

$$\text{integrate } \checkmark \quad u(t) = \frac{t}{\sin t} \quad \checkmark$$

$$\frac{t}{\sin t} \cdot X_2' + \frac{t}{\sin t} \left(\frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t} \right) \cdot X_2 = \frac{A}{\sin^2 t}$$

$$\frac{t}{\sin t} X_2' + \frac{\sin t - t \cdot \cos t}{\sin t} \cdot X_2 = \frac{A}{\sin^2 t}$$

$$\int \left(\frac{t}{\sin t} \cdot X_2' \right) dt = \int \frac{A}{\sin^2 t} dt$$

$$\frac{t}{\sin t} \cdot X_2 = A \frac{\cos t}{\sin t} + A C_1$$

$$X_2 = A \cdot \frac{\cos t}{t} + A C_1 \frac{\sin t}{t} \Rightarrow \bar{X}_2 = X_2 - A C_1 \cdot X_1 \quad \text{ilw } \checkmark$$

$$\boxed{\bar{X}_2 = A \cdot \frac{\cos t}{t}}$$

$$X = \bar{C}_1 \cdot X_1 + \frac{\bar{C}_2}{A} \cdot \bar{X}_2$$

$$\boxed{X = \bar{C}_1 \frac{\sin t}{t} + \bar{C}_2 \frac{\cos t}{t}} \quad \checkmark$$

3.

(a) $t \cdot x'' - (1+t)x' + x = 0 \Rightarrow x'' - \frac{1+t}{t} \cdot x' + \frac{1}{t} \cdot x = 0 \quad x_1 = e^t$

$(x_2'' = e^t ; x_2' = e^t)$ (כאן נבדוק את x_2 בלבד)

$t \cdot e^t - (1+t) \cdot e^t + e^t = 0$

$t \cdot e^t - e^t - t \cdot e^t + e^t = 0 \quad \checkmark$

$W = x_1 \cdot x_2' - x_1' \cdot x_2 = e^{\int \frac{1+t}{t} dt} = e^{\int \frac{1}{t} dt + \int 1 dt} = A \cdot e^{-t+t} = A \cdot t \cdot e^t$

$x_2' - \frac{x_1'}{x_1} \cdot x_2 = \frac{W}{x_1}$

$u(t) = e^{-\int \frac{e^t}{e^t} dt} = e^{-\int 1 dt} = e^{-t} = \underline{\underline{e^{-t}}}$ (כאן נבדוק את u בלבד)

$e^{-t} \cdot x_2' - x_2 \cdot e^{-t} = e^{-2t} \cdot A \cdot t \cdot e^t$ (כאן נבדוק את x_2 בלבד)

$\int (e^{-t} \cdot x_2)' dt = A \int \frac{t}{e^t} dt$

$e^{-t} \cdot x_2 = -A t \cdot e^{-t} - A \cdot e^{-t} + C_1 \cdot A$

$x_2 = -A t - A + C_1 e^t \Rightarrow \bar{x}_2 = x_2 - A C_1 \cdot x_1 \Rightarrow$ (כאן נבדוק את \bar{x}_2)

$\bar{x}_2 = -A(t+1)$

$x = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 \cdot \frac{1}{A} \bar{x}_2$

$x = \bar{c}_1 \cdot e^t + \bar{c}_2 (t+1)$ (כאן נבדוק את x בלבד)



(b) $t^2(t+1)x'' - 2x = 0 \Rightarrow x'' - \frac{2}{t^2(t+1)} \cdot x = 0 \quad x_1 = 1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t}$

$(x_2'' = \frac{2}{t^3} ; x_2' = -\frac{1}{t^2})$ (כאן נבדוק את x_2 בלבד)

$t^2(t+1) \cdot \frac{2}{t^3} - 2(t+\frac{1}{t}) = 0$
 $2t + \frac{2}{t} - 2t - \frac{2}{t} = 0 \quad \checkmark$

$W = x_1 \cdot x_2' - x_1' \cdot x_2 = e^{\int 0 dt} = e^{\bar{c}_1} = C_1$

$x_2' - \frac{x_1'}{x_1} \cdot x_2 = \frac{W}{x_1}$

$u(t) = e^{-\int \frac{x_1'}{x_1} dt} = e^{-\ln(x_1)} = \frac{1}{t+1}$ (כאן נבדוק את u בלבד)

$(\frac{1}{t+1} \cdot x_2)' = C_1 \cdot \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t+1} = C_1 \cdot \frac{1}{(t+1)^2}$

$\int (\frac{1}{t+1} \cdot x_2)' dt = C_1 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = C_1 \int \frac{1}{m^2} dm = C_1 [\int 1 dm - 2 \int \frac{1}{m} dm + \int \frac{1}{m^2} dm]$ (כאן נבדוק את x_2 בלבד)

$\frac{1}{t+1} \cdot x_2 = C_1 m - 2C_1 \ln m - \frac{1}{m} \cdot C_1 + C_2 = C_1(t+1) - 2C_1 \ln(t+1) - \frac{1}{t+1} C_1 + C_2$

$x = C_1(t+1)^2 - 2C_1(t+1) - \frac{1}{t+1} C_1 + C_2 = \frac{1}{t+1} C_1 + C_2 - \frac{(t+1)^2}{2(t+1)}$

$$4. (b) \begin{vmatrix} y & e^x + \cos x & e^x + \sin x \\ y' & e^x - \sin x & e^x + \cos x \\ y'' & e^x - \cos x & e^x - \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= y \cdot \begin{vmatrix} e^x - \sin x & e^x + \cos x \\ e^x - \cos x & e^x - \sin x \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} e^x + \cos x & e^x + \sin x \\ e^x - \cos x & e^x - \sin x \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} e^x + \cos x & e^x + \sin x \\ e^x - \sin x & e^x + \cos x \end{vmatrix}$$

$$= y [(e^x - \sin x)(e^x - \sin x) - (e^x + \cos x)(e^x - \cos x)]$$

$$- y' [(e^x + \cos x)(e^x - \sin x) - (e^x + \sin x)(e^x - \cos x)]$$

$$+ y'' [(e^x + \cos x)(e^x + \cos x) - (e^x + \sin x)(e^x - \sin x)]$$

$$= y (e^{2x} - 2e^x \sin x + \sin^2 x - e^{2x} + e^x \cos x - e^x \cos x + \cos^2 x)$$

$$- y' (e^{2x} - e^x \sin x + e^x \cos x - \cos x \sin x - e^{2x} + e^x \cos x - e^x \sin x + \sin x \cos x)$$

$$+ y'' (e^{2x} + 2e^x \cos x + \cos^2 x - e^{2x} + e^x \sin x - e^x \sin x + \sin^2 x)$$

$$= (\cos^2 x - 2e^x \sin x + \sin^2 x) y - (2e^x \cos x - 2e^x \sin x) y' + (\cos^2 x + 2e^x \cos x + \sin^2 x) y''$$

$$= (1 - 2e^x \sin x) y - 2e^x y' (\cos x - \sin x) + (1 + 2e^x \cos x) y''$$

$$(2) \begin{vmatrix} y & \cosh x & \sinh x \\ y' & \sinh x & \cosh x \\ y'' & \cosh x & \sinh x \end{vmatrix} =$$

$$= y \begin{vmatrix} \sinh x & \cosh x \\ \cosh x & \sinh x \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \cosh x & \sinh x \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{vmatrix}$$

$$= y (\sinh^2 x - \cosh^2 x) - y' (\cosh x \sinh x - \cosh x \sinh x) + y'' (\cosh^2 x - \sinh^2 x)$$

$$= (\sinh^2 x - \cosh^2 x) y + (\cosh^2 x - \sinh^2 x) y''$$

$$= \left[\frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 - \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 \right] y + \left[\frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 \right] y''$$

$$= \left[\frac{1}{4} (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} - 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \right] y + \left[\frac{1}{4} (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \right] y''$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (-4) \cdot y + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot y'' = \underline{y'' - y}$$

8

5.

(E) $0 < x < 1$ בתחום

$$f(x) = x \cdot |x| = x^2 \Rightarrow f(x) = 1 \cdot g(x) \Rightarrow \text{טלור אינלר}$$

(F) $-1 < x < 0$ בתחום

$$f(x) = x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2 \Rightarrow f(x) = (-1) \cdot g(x) \Rightarrow \text{טלור אינלר}$$

(G) $-1 < x < 1$ בתחום

נניח > שלשה שהפונקציות תלויות וזכור קיימים λ_1, λ_2 (הישוגה נ-0) λ_3 כך

$$\lambda_1 g(x) + \lambda_2 f(x) = 0$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x \cdot |x| = 0 \quad (x=0 \text{ מוגדרת, } x \neq 0 \text{ נניח } x \neq 0)$$

$$\lambda_1 x = -\lambda_2 |x|$$

$$\frac{x}{|x|} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda_3$$

הלכה $0 < x < 1$ / הלכה $-1 < x < 0$

$$\lambda_3 = \frac{x}{-x} = -1 \quad \lambda_3 = \frac{x}{x} = 1$$

קייבנו כי $\lambda_3 = 1 \neq -1$ לכן הפונקציות אינן תלויות אינלר ב- $-1 < x < 1$

(E) נחשב את W עבור הפונקציות בהתאם $-1 < x < 1$

$$W = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 2x^3 - 2x^3 = 0 & (0 < x < 1) \\ \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = -2x^3 + 2x^3 = 0 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

(3) קיבלנו שערך W של הפונקציות בתחום $-1 < x < 1$ הינו 0. לכן, לפונקציות אלו יש פונקציות תלויות (המשפט של וייבר) (המשפט של וייבר) (המשפט של וייבר) כי 2 הפונקציות תלויות אינלר, לכן זהו אומר בתורה לכן ש-2 פונקציות אינן תלויות אינלר כפי שהוכחנו ב-(E).

☒ סוף

הערות: $W=0$ אומר שהפונקציות תלויות אינלר