אנליזה נומרית - שיעור 8

שיטות איטרטיביות לפתרון $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$, $\rho(A)$, $\underline{x}^{(k+1)} = B\cdot \underline{x}^{(k)} + c$

Jacobi , Gauss-Seidel

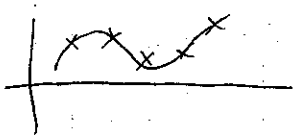
השיטות הבאות בפתרונים

למצוא ב- help של matlab

	$A\cdot \underline{x} = b$	$A\cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$
$A = A^*$	Conjugate Gradient CG	Lanczos
$A \neq A^*$	CGN , BCG GMRES	Arnoldi

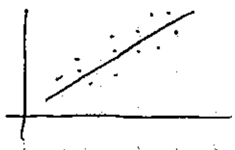
אינטרפולציה ע"י פולינום

(x_j , y_j) $\quad j = 0\dots N$



מהו הפולינום $P(x)$ המקיים: $P(x_j) = y_j \quad j=0\dots N$

למה זה טוב?



למצוא את הישר הקרוב ביותר

- הדבר היחידי שיודעים לחשב הוא פולינומים ופונקציות רציונליות.

אינטגרל קשה לחשב אך נומרית ניתן: $f(x)$, $\int_a^b f(x)dx$

$$P(x) = f(x) + e(x)$$

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b P(x) - \underbrace{\int_a^b e(x)}_{\text{קטן}}$$

פולינום אלגברי: $\sum_{j=0}^{N} a_j \cdot x^j$, פולינום טריגונומטרי: $\sum_{j=-N}^{N} a_j \cdot e^{ijx}$

$$e^{ijx} = \cos(jx) + i\cdot \sin(j\cdot x)$$

מעוניינים לחשב בצורה הנ"ל - $\sum_{j=0}^{N} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_N \cdot x^N$

פעולה

- לחשב את ה-x^j $\quad N-1 \quad (x)$. לחשב את כל ה-x-ים (החזקות) לוקח N-1 הכפלות, כי מתחילים לחשב מ-x^2.
- כפל $a_j x^j$ $\quad N \quad (x)$
- סכום $\quad N \quad (+)$

זה מראה כמה זמן לוקח לנו לחשב

דרך נוספת לרשום את הביטוי:

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{N-2} + x(a_{N-1} + a_N \cdot x))\dots)$$

דרך רישום זאת מביאה לחישוב של:

בדרך זו אין x^j יש רק x.

- כפל - יש לי N פעולות. - חיבור - יש לי N פעולות.

לכן משמעותית כבר יש פחות שגיאה.

הבעיה (x_j , y_j) $\quad j=0\dots N$

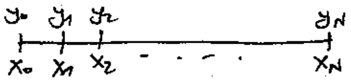
פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-N המקיים: $P(x_j) = y_j$, $j=0\dots N$

שיטה I

$$\sum_{j=0}^{N} a_j \cdot x^j = (1, x, x^2, \dots, x^N) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

נסדר במטריצה: עבור $X=(x_0\ x_1\ x_2 \dots)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$



הנקודות שלנו x_j, y_j נתונות, a_j לא נתונים.

צריך למצוא את וקטור a.

Vander Monde מטריצה מיוחדת!

טענה: כל עוד $x_j \neq x_k$, $j\neq k$ המטריצה הפיכה.

הוכחה: נסמן ב- $V(1, x_0, x_1, \dots, x_n)$ את המטריצה.

$$\det(V(1, x_0, \dots, x_n)) = \prod_{\substack{k,j=0 \\ k<j}}^{n} (x_j - x_k)$$

באינדוקציה:

$$\det(V(1)) = 1$$

$$\det\left(\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}\right) = (x_1 - x_0) \neq 0 \quad x_1 \neq x_0$$

אז המטריצה הפיכה, ה- $\det \neq 0$ שאז $x_0 \neq x_1$. (ולהפך).

נסמן את x בצורה הפולינומית

$$\det(V(1, x_0, \dots x_n, x)) = \det\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^n & x_n^{n+1} \\ 1 & x & \dots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה היא פולינום ב- x ממעלה $n+1$.

השורשים של הפולינום הם: $x_0 \dots x_n$. אם נציב בשורה אחת נציב ב- x_j את x_j, אז יהיו לנו שתי שורות זהות, ואז הדטרמיננטה היא 0. הדטרמיננטה היא הפולינום, אז נציב במקום $x_0 \dots x_n$ מסויים נקבל שתי שורות זהות.

לכן: $\det = c\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ ← פולינום, במעלה $n+1$.

c זה התנאי שבו x^n זה $\prod_{j=0}^{n+1}(x-x_j)$, ועכשיו רק מכפילים את האיבר עם x^{n+1} אז קיבלנו עוד מקדם שנקרא לו c

c הוא המקדם של $n+1$. נובע מהחישוב של הדטרמיננטה.

<u>מצד שני:</u> בחישוב מפורש של הדטרמיננטה, המקדם של x^{n+1} הוא:

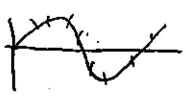
$$\det|V(x_0, \dots, x_{n+1})| = \prod_{\substack{k,j=0 \\ k<j}}^{n+1}(x_j - x_k) \quad \text{לכן}, \quad \det|V(x_0 \dots x_n)|$$

בסוף, הדטרמיננטה שונה מ-0 כל עוד $x_k \neq x_j$, $k \neq j$.

קיום ויחידות לפולינום, k של התהליך $\sqrt{}$-k כמה שזה קטן ישפיע על הפתרון. ${}^{\text{מספר הצעדים שהתהליך}}$

$O(n^3)$ – במערכת לינארית קיימת היחידות. $X\underline{a}=\underline{y}$

חישוב מקדמי הפולינום הוא



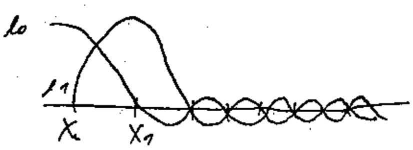
בגלל שהמטריצה היא הפיכה והפולינום ממעלה n ← קיים יחיד.

הם תמיד התכונות של המטריצה שאנחנו צופים. פתרון עם משוואה בזמן $O(n^3)$?

<u>שיטה II</u> – פולינום האינטרפולציה של לגרנז' Lagrange

<u>הרעיון:</u>

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = b_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + b_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \dots + b_k \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_k}$$



$$l_j(x) = \begin{cases} l_j(x_k) = 0 & j \neq k \\ l_j(x_j) = 1 \end{cases}$$

זה שני פולינומים שונים

$$P=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot y_i = l_0(x)\cdot y_0 + l_1(x)\cdot y_1 + \dots + l_n(x)\cdot y_n$$

אם x_0, אז הכל מתאפס חוץ מהאיבר הראשון ונשאר y_0.
אם x_1, x_2, הכל מתאפס חוץ מהאיבר השני, ונשאר y_1.

בניית $l_j(x)$: $l_j(x_k)=0$, $k\neq j$

<u>דרישה I:</u>

$$l_j = c\cdot\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x-x_k) = c(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

המכפלה הזו מתאפסת כאשר מציבים x_k.
כש-k שונה מ-0 עד n חוץ מ-j.

<u>דרישה II:</u>

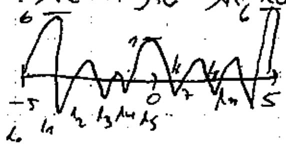
$$l_j(x_j)=1$$

$$l_j(x_j)=\frac{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x-x_k)}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j-x_k)}=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right)$$

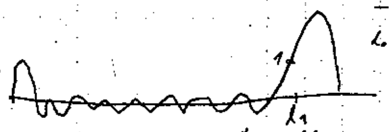
עדיין בנקודות x_k זה יתאפס
ופה זה שווה ל-1 כאשר מציבים x_j.

הצלחנו לבטא את שתי הדרישות. שב-x_j נקבל 1 ושב-x_k, $k\neq j$ עבור x_k נקבל 0.

<u>דוגמה:</u> נרצה l שיהיה 1 ב-x_5 ו-0 בכל השאר l_5:



אם נצייר כל אחד עבור l_9:



האינטרפולציה בין נקודה לנקודה יכולה "לקפוץ".

<u>דוגמה:</u>

$$f(x)=x^2+3x+1$$

$x_0=0 \quad f(0)=1$
$x_1=1 \quad f(1)=5$
$x_2=2 \quad f(2)=11$

פשוט הציב ערכים של x_0,x_1,x_2

$$l_0=\prod_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{2}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}=\frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$l_1=\prod_{\substack{j=0\\j\neq 1}}^{2}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}=\frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)}=-\frac{2x^2-4x}{2}$$

$$l_2=\prod_{\substack{j=0\\j\neq 2}}^{2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}=\frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)}=\frac{x^2-x}{2}$$

הצב בפולינום: $P(x)=f(x_0)\cdot l_0+f(x_1)\cdot l_1+f(x_2)\cdot l_2$.

$$P(x)=1\cdot l_0+5\cdot l_1+11\cdot l_2=x^2+3x+1$$

<u>דוגמה</u>

$f(x)=2x+1$

$x_0=0 \quad f(0)=1$
$x_1=1 \quad f(1)=3$
$x_2=2 \quad f(2)=5$

בתוך l לא נכנס y. אלו פונקציות של נקודות בלבד!

$$\Rightarrow P(x)=1\cdot l_0+3\cdot l_1+5\cdot l_2=1\cdot\frac{(x^2-3x+2)}{2}-3\cdot\frac{2x^2-4x}{2}+5\cdot\frac{x^2-x}{2}$$

$$P(x)=0\cdot x^2+2x+1 \checkmark$$

קירבנו פולינום ע"י 3 נקודות נתונות

<u>הסדר של הנקודות לא משנה! רואים זאת לפי הפיתוח</u>

הוכחת יחידות (נוספת):

(x_j, y_j) $j=0..N$ הנקודות הידועות.

$P(x_j)=y_j$, $Q(x_j)=y_j$ $j=1..N$

$(P-Q)(x_j)=0$ P,Q לכל היותר ממעלה N

$j=0..N-1$ $(P-Q)(x_j)=0$

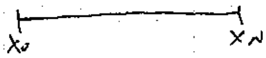
$(P-Q)$ פולינום ממעלה N לכל היותר המתאפס ב- $x_0 \dots x_N$.

בגלל שהפולינום ממעלה N אז הוא מיוצג כך: $(P-Q)=c\cdot\prod_0^{N-1}(x-x_j)$ המעלה היא N.

$$(P-Q)(x_N)=c\cdot\prod_0^{N-1}(\underbrace{x_N-x_j}_{\neq0})=0 \Rightarrow c=0$$

אנחנו יודעים שזה מתאפס גם ב-x_N אז לא נותר כי $c=0$

שגיאת האינטרפולציה:



נניח ש- $f\in C^{N+1}(I)$. I - הקטע שמכיל את כל הנק' $\{x_j\}$ והנקודה x. $x_j\neq x_k$.

$(*)$ שארית טיילור ξ זה מספר בקטע

$$E_N=f(x)-P_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\cdot W_{N+1}(x)$$

$$W_{N+1}(x)=\prod_{j=0}^{N}(x-x_j)$$

$x\in I$, P_N פולינום ממעלה N לכל היותר.

הוכחה: עבור נקודות האינטרפולציה $E_N=0$. עבור x שאר הנקודות נתבונן ב-:

$$G(t)=E_N(t)-\frac{W_{N+1}(t)\cdot E_N(x)}{W_{N+1}(x)}$$

נשים לב ש- $W_{N+1}(x)\neq0$

$f\in C^{N+1}$, W, P_N פולינומים לכן $G\in C^{N+1}$

ל-G יש N+2 אפסים x_k $k=0..N$

$$G(x_k)=0=\overset{=0}{E_N(x_k)}-\frac{\overset{=0}{W_{N+1}(x_k)}\cdot E_N(x)}{W_{N+1}(x)}$$

לפי ההגדרה E_N וב-W_{N+1} (ההגדרות שלהם)

במקום t הכנו x

$$G(x)=E_N(x)-\frac{\cancel{W_{N+1}(x)}\cdot E_N(x)}{\cancel{W_{N+1}(x)}}=0$$

לכן ל-G יש N+2 אפסים שונים ב-I

לפי W ו-E (ההגדרות שלהן) יש N+1 אפסים. מצאנו עוד אחד.

ל-$G(t)$ יש N+2 אפסים ב-I לכן ל-$G'(t)$ יש N+1 אפסים שונים ב-I.

ל-$G'(t)$ יש N+1 אפסים ב-I לכן ל-$G''(t)$ יש N אפסים שונים ב-I.

ל-$G^{(N+1)}(t)$ יש אפס בודד ב-I - נסמן אותו ב-ξ.

אבל: $E_N^{(N+1)}(t)=f^{(N+1)}(t)$ כי $P_N^{(N+1)}=0$ (לפי *) ! $W_{N+1}^{(N+1)}(t)=(N+1)!$

$$G^{(N+1)}(t)=f^{(N+1)}(t)-\frac{(N+1)!\cdot E_N(x)}{W_{N+1}(x)} \quad \forall t\in I$$

בפרט עבור $t=\xi$ אז

$$f^{(N+1)}(\xi)-\frac{(N+1)!\cdot E_N(x)}{W_{N+1}(x)}$$

לכן:

$$E_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}W_{N+1}(x)$$