1

אנליזה נומרית - תרגול 10

גזירה נומרית

$f(a)$

$$f(a+h) \underset{\text{טיילור}}{=} f(a) + h\cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + O(h^3)$$

$$f(a+3h) = f(a) + 3h\cdot f'(a) + \frac{9}{2}h^2 f''(a) + O(h^3)$$

אנחנו רוצים למצוא קירוב לנגזרת של f בנקודה a ("מצא סכימה" ל- $f'(a)$).

נייצג את המשוואות שרשמנו בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f(a) \\ hf'(a) \\ \frac{h^2}{2} f''(a) \end{pmatrix}}_{(☆)} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(a+h) \\ f(a+3h) \end{pmatrix} + O(h^3)$$

נמצא חיסור של המשוואות

$$(*) \quad f(a+h) - f(a) = hf' + \frac{h^2}{2} f'' + O(h^3)$$

$$(**) \quad f(a+3h) - f(a) = 3hf' + 9\frac{h^2}{2} f'' + O(h^3)$$

אנחנו רוצים ליצור צירוף לינארי של המשוואות כדי לבודד את f':

$$9(*) - (**) \Rightarrow 9(f(a+h) - f(a)) - (f(a+3h) - f(a)) = 6hf' + O(h^3)$$

$$f'(a) = \frac{-8f(a) + 9f(a+h) - f(a+3h)}{6h} + O(h^2)$$

כיוון שהוקטור ☆ מכיל גם את $f''(a)$ ניתן גם לקרב אותו. אבל, כיוון שהמקדם שלו הוא h^2 נקבל רמת דיוק של $O(h)$. אפשר למצוא משהו טוב יותר מהסכמה הזו.

אנחנו רוצים להוכיח את השוויון הבא. אם נפתח את המשוואות עם $(+h)$ ו- $(-h)$ (במקום h ו-$3h$) נקבל סכמה עם שגיאה טובה יותר (סדר שני).

תרגיל

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \overset{?}{=} f''(x) + \underbrace{\frac{f^{(4)}(c)}{12}\cdot h^2}_{\text{שגיאה}}$$

$$(3*) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(c_1)$$

$$(4*) \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(c_2)$$

נסכום:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)\right)$$

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{24}\underbrace{\left(f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)\right)}_{2\cdot f^{(4)}(c_3)}$$

ממשפט ערך הביניים

קיבלנו את המשוואה שרצינו.

<u>תרגול על שגיאה</u>

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \delta(x) \qquad (|\delta| < \varepsilon)$$
ערך מדידה ↑ ערך אמיתי ↑

מדדנו את $f(x)$ וקיבלנו

רוצים לחשב את השגיאה. ידוע כי $\max f^{(4)} = M$.
אם יש לנו רעש זה מתבטא משמע בנגזרת. (למשל אם יש שגיאת בקריאה של הספק הקולט ~~———~~).

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x+h)\right) + \frac{1}{h^2}\left(\delta(x+h) - 2\delta(x) + \delta(x-h)\right)$$

$$E = \left|\frac{1}{h^2}\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h) - f''(x)\right| = \left|\underbrace{\frac{f^{(4)}(c)h^2}{12}}_{\text{אם לא היה רעש}} + \frac{\delta(x+h) - 2\delta(x) + \delta(x+h)}{h^2}\right| \leq$$

רק זה היתה השגיאה.

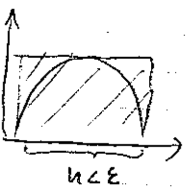
$$\leq \left|\frac{M}{12}\cdot h^2\right| + \left(|\delta(x+h)| + |2\delta(x)| + |\delta(x-h)|\right)\frac{1}{h^2} \leq \frac{M}{12}\cdot h^2 + \underbrace{\frac{4\varepsilon}{h^2}}_{(\equiv)} = g$$

נשים לב לבעיה שקיבלנו. בדר"כ כשאנחנו מחשבים נגזרת אנו מחשבים בגמדעות $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$... הבעיה פה היא שכאשר גבול של h השואף ל-0.
h שואף ל-0 אז האיבר $(\equiv)$ גדל.

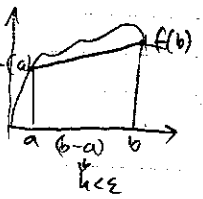
$$g'(h) = \frac{M}{6}h - \frac{8\varepsilon}{h^3} \Rightarrow h^* = \frac{48\varepsilon}{M} \approx 0.12$$

נחשב את נק' המינימום:
זוהי הנקודה h בה נקבל את השגיאה הכי קטנה..

<u>אינטגרציה</u>



ניתן על פונקציה כלשהי (נניח שהיא פשוטה ויפה) ואנחנו רוצים לקרב את האינטגרל שלה. נוכל לחפות אותה ע"י מלבן (בהנחה ש $h<\varepsilon$) ואז השגיאה מספיק קטנה.



אנחנו רוצים לשפר את הפרין, אז אנחנו יכולים להגיד שזהו טרפז..

$$\int_a^{b=a+h} f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(a+h)}{2}\cdot h + O(h^3)$$
שטח טרפז

$$f(x) \approx P_1(x) = f(a)\frac{x-(a+h)}{\underset{a-(a+h)}{-h}} + f(b)\cdot\frac{x-a}{\underset{(b-a)}{h}}$$
פולינום לגרנז'

אם $b-a > \varepsilon$ אז אנחנו נחלק את הקטע (מספר קטעים ובכל קטע עושים טרפז. נקבל את הנוסחה:

$$X_k = a + k\cdot h \qquad h = \frac{b-a}{N} \qquad k = 0,\dots,N$$

$$\int f(x)\,dx = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2}\right) - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)\cdot h^2$$

הדיוק ירד כי יש לנו N פעמים h^3, כלומר קיבלנו Nh^3. אבל N תלוי ב-h ($h = \frac{b-a}{N}$) ולכן זה כמו $\frac{h^3}{h} = h^2$.

$$f(x) \approx P_2(x) \;\text{---}\; \text{פולינום לגרנז'} + O(h^3)$$

לפי כלל סימפסון אנחנו מקרבים בגמדעות 3 נק' (במקום 2 נק' בכלל הטרפז) ונקבל

$$\int_a^{a+2h} P_2(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right) - \frac{f^{4}(\xi)}{2880}h^5 \rightarrow$$
שיפרנו את השגיאה

לא אותו h! ←
$$X_k = a + kh;\; h = \frac{b-a}{2N} \quad k = 0,\dots,2N; \quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(b)\right)$$

השגיאה
$$\frac{b-a}{180}\max(f^{4})\cdot h^4$$
(על דרגה באה מהטעלה של הנק').