סיבוכיות - תירגול 11

בעיית קירוב של מספר הצביעה של גרף

ראינו שלכל $\delta>0$ קיים $k(\delta)$ כך שבעיית $Gap\text{-}k(\delta)CSG_V[\delta,1]$ היא NP-קשה. מכאן נובע כי $Gap\text{-}IS[\frac{\delta}{k(\delta)},\frac{1}{k(\delta)}]$ היא NP-קשה ולכן קשה לקרב את IS בכל פקטור קבוע.

<u>טענה 1:</u> יהי G גרף פשוט, $\chi(G)$ - מס' הצביעה של G, $\alpha(G)$ - גודל הקבוצה הב"ת המקסימלית ב-G. מתקיים: $\chi(G)\cdot\alpha(G)\geq|V(G)|$

<u>הוכחה:</u> צביעה של G ב-$\chi(G)$ צבעים היא חלוקה ל-$\chi(G)$ קבוצות ב"ת של $|V(G)|$ צמתים.

נגדיר את הבעיה $q\text{-}CSG_\Delta$ שהיא מקרה פרטי של CSG_V:

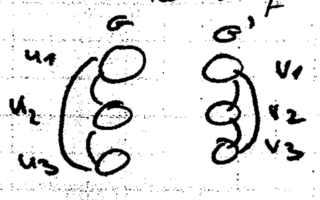
בבעיה זו, לכל קשת uv מוגדרת תת קבוצה של הפרשים מותרים $S_{uv}\subseteq Z_q$ (מניחים בה"כ שקבוצת הצבעים היא $\{0,\dots,q-1\}$). צביעה (x,y) של זוג צמתים (u,v) תהיה טובה $\Leftrightarrow$ $x-y\in S_{uv} \mod q$

<u>הערה:</u> בבעיית CSG_Δ אם φ צביעה טובה לכל צמתי הגרף, אז גם $\varphi'(u)=\varphi(u)+i$ היא צביעה טובה לכל בחירה של i.

<u>למה:</u> לכל $\delta>0$, קיים $q(\delta)$ כך שהבעיה $Gap\text{-}q(\delta)CSG_\Delta[\delta,1]$ היא NP-קשה.

<u>הוכחה:</u> ראשית, נניח שהלמה נכונה ונוכיח שמספר הצביעה קשה לקירוב ע"י הגדרת בעיית gap מתאימה.

כזכור, בשיעור הקודם ראינו רדוקציה מ-CSG_V ל-IS ע"י העברת גרף G לגרף קלסטרים G', כאשר כל cluster הכיל קליק בגודל q המתאים לצביעות האפשריות של צומת כלשהו ב-G.



נשתמש באותה הבנייה בדיוק, בהבדל שבעיית גרף המוצא G מגדיר בעיית אילוצים מסוג CSG_Δ

* אם ניתן לצבוע רק ≤ δn צמתים ב-G, כמו שראינו, ב-G' לא ניתן למצוא קבוצה ב"ת בגודל > δn (המקסימלית בגודל ≤ δn).

לפי טענה 1, $\underbrace{\chi(G')}_{\geq \frac{q}{\delta}}\cdot\underbrace{\alpha(G')}_{\leq \delta n}\geq\underbrace{|V(G')|}_{=n\cdot q}$, לכן נובע כי מספר הצביעה של G', שהוא $\chi(G')$ הוא לפחות $\frac{q}{\delta}$.

* אם קיימת צביעה חוקית לכל צמתי $G \Leftarrow$ קיימת קבוצה ב"ת S_0 שכל צמתיה בעלות צבע אחד מכל קליקה ב-G'. לכל i אם נוריד i לכל צביעה ב-G, נקבל צביעה חוקית. (כי האילוצים מוגדרים ע"י הפרשים בלבד)

לכן לכל i נקבל קבוצה ב"ת S_i עם צבע מכל קליקה ב-G'.

בנוסף, לכל $0 \le i \le q-1$ מתקיים $S_i \cap S_j = \emptyset$. הצביעה של קו"צ זוגי עם מילוי קודקודים ב"ת

קיבלנו q קבוצות $S_0, \dots, S_{q-1}$ שהן ב"ת ומכסות את צמתי G'.

מסיקים שמספר הצביעה של $G' \ge q$.

$\Leftarrow$ משני המכיוונים, קיבלנו בעיית Gap שבה NP-קשה להפריד בין גרפים שמספר הצביעה שלהם $\ge q$ וגרפים שמספר הצביעה בהם $\le \frac{q}{5}$ לכל $\epsilon > 0$.

לכן, קשה לקרב את מספר הצביעה בכל פקטור קבוע. ■

<u>הוכחת הלמה:</u>

די להוכיח כי $\text{Gap-}k\text{CSG}_1[\epsilon, 1] \le_p \text{Gap-}(nk)^5\text{-CSG}_\Delta[\delta, 1]$ לכל δ.

נשתמש בטענת העזר הבאה:

<u>טענה:</u> תהי $|S| = p$. קיימת העתקה $\psi : S \to \mathbb{Z}_q$, $q = O(p^5)$, כך שלכל $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in S$

$$\psi(a_1) + \psi(a_2) + \psi(a_3) = \psi(a_4) + \psi(a_5) + \psi(a_6)$$
$$\Downarrow$$
$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_4, a_5, a_6\}$$

(נוותר על ההוכחה)

בקצרה: לכל איבר ניתן מס' כזה שהסכומים שונים...

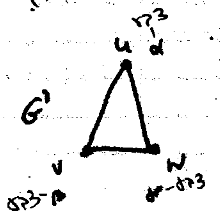
נניח את הוכחת הטענה (שמתקיימת מבנייה חמדנית) ונציין שהיא מספקת אלגוריתם פולינומי ב-p שמוצא העתקה ψ כנ"ל.

בהינתן גרף G, קלט ל-CSG, שיקרא G, נבנה ממנו גרף חדש G' שיהיה קלט לבעיית $q\text{-CSG}_\Delta$, כאשר $q = O((nk)^5)$.

לכל צומת u ב-G וצבע $i \in \{1, \dots, k\}$ מגדירים צבע חדש (u, i), ואם (i, j) הייתה צביעה טובה לקשת uv ב-G, נגדיר ב-G' את $\psi((u,i)) - \psi((v,j))$ כהפרש "טוב" עבור הקשת uv.

* נניח שב-G יש צביעה φ שהיא טובה לכל הצמתים. מההגדרה G' הצביעה לכל צומת u של u ב-G' ע"י $\psi(u, \varphi(u))$ טובה. (כי כזה הגדרנו את ההפרש "טוב")

* אז ב-G' ניתן לצבוע 1-δ מהצמתים. נראה שגם ב-G ניתן לעשות כן.



מן הגרף G' נובע עבור שלושת הקודקודים שצבענו:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha - \beta &= \psi(u, i) - \psi(v, j) \\ \beta - \gamma &= \psi(v, k) - \psi(w, l) \\ \gamma - \alpha &= \psi(w, s) - \psi(u, t) \end{aligned}$$

לאחר שנפתח ונעביר אגפים, נקבל:

$$\Psi(v,j)+\Psi(w,\ell)+\Psi(u,t)=\Psi(u,i)+\Psi(v,k)+\Psi(w,s)$$

$\Rightarrow$ $t=i$ וגם $k=j$ וגם $\ell=s$! (לפי תכונת Ψ)

$\Rightarrow$ כל צביעה ב-G של ח"ל צמתים, ניתנת לשחזור לצביעה של ח"ל צמתים ב-G. ולכן להיפך, אם ניתן לצבוע ב-$G \geq$ ח"ל צמתים, כך גם ב-G.

זה מסיים את הוכחת הרדוקציה ■