סטטיסטיקה למדעי המחשב - שיעור 9 (שבוע 10)

הנושא שלנו היום הוא בדיקת השערות.

בדיקת השערות

כרגיל, אנו חושבים על אוכלוסיה עם התפלגות של X ופרמטר θ שמאפיין את ההתפלגות ומעניין אותנו לאמוד.

בבעיית בדיקת השערות יש לנו ערך θ_0 שאנחנו "מאמינים" שהוא הנכון ל-θ. (נרשום $\mathcal{H}_0: \theta = 0$)

כמו כן, יש לנו טענה מתחרה לגבי הערך של θ $(\mathcal{H}_A: \theta \in H_A)$

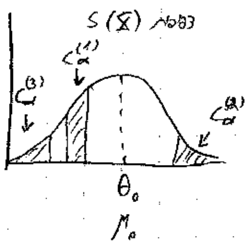
<u>הרעיון הבסיסי:</u> נמשיך להאמין ב-$\mathcal{H}_0$ אלא אם כן יש לנו "סיבה טובה" לשנות את דעתנו.

<u>באופן מעשי:</u> ניקח מדגם מקרי, נחשב סטטיסטי $S(\underline{X})$ ונדחה את השערת ה-θ אם הערך שנקבל לסטטיסטי הוא "לא סביר" תחת $\mathcal{H}_0$.

(*) נסתכל בהמשך על דוגמאות.

<u>מבחן סטטיסטי</u> ברמה α להשערה $H_0: \theta=\theta_0$ ע"פ סטטיסטי $S(\underline{X})$ מוגדרת על ידי אזור דחיה $C_\alpha \subseteq Range(s)$ כך ש:

$$Pr_{H_0}(S(\underline{X}) \in C_\alpha) \le \alpha$$

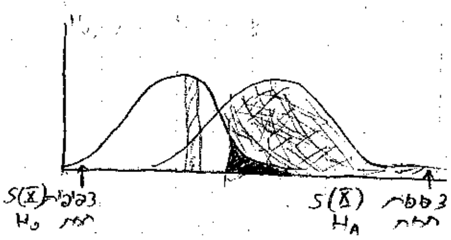


אזור הדחיה אינו מוגדר בצורה חד ערכית ע"י $\alpha, \mathcal{H}_0$.

(*) אנו רואים בגרף שניתן לבחור את אזור הדחיה בצורה במספר אזורים על פני ההתפלגות. כלומר אין הגדרה יחידה לאזור זה.

איך נבחר בין אזורי הדחיה האפשריים?

נסתכל על האלטרנטיבה שמעניינת אותנו, ונשאל את עצמנו, איזה מאזורי הדחיה "יותר סביר" תחת האלטרנטיבה.



(*) כלומר אני רוצה שמבחן שאני מנסה למקסם את השטח הנגזר מהאלטרנטיבה כך שהשטח תחת H_0 נשאר α.

<u>דוגמה</u> $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 ידוע

$H_0: \mu=\mu_0$ משתמשים ב- $S(\underline{X}) = \bar{X}$

אזורי דחיה אפשריים ברמת α: תחת H_0: $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$

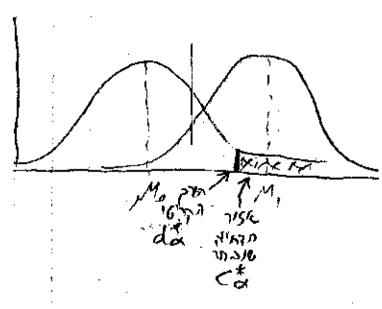
<u>שאלות:</u>

<u>א.</u> מה יהיה אזור הדחיה תחת האלטרנטיבה $(\mu_1>\mu_0)$ $H_A: \mu=\mu_1$?

במקרה זה $\bar{X} \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\alpha = P_{H_0}(\bar{X} \in C^*_\alpha) = Pr_{H_0}(\bar{X} \ge d^*_\alpha) = \mu_0 + Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

אני מחליף ל-Z כיוון שיש רק כיוון אחד לטבלאות רק סמך כי אני מחליף את השטח ל-Z.



סטטיסטיקה למדעי המחשב - שיעור 9

חישוב אזור דחיה עבור אלטרנטיבה $\mu=\mu_1>\mu_0$.

1. נשים לב שתחת האלטרנטיבה ערכים גדולים של $S(\bar X)=\bar x$ הם יותר סבירים

2. נבחר אזור דחיה מהסוג $C^*_\alpha=[d,\infty)$.

3. נמצא את d^*_α:

$$P_{H_0}(\bar X\ge d^*_\alpha)=\alpha$$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar X-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}\ge\frac{d^*_\alpha-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}\right)=\alpha\Rightarrow\frac{d^*_\alpha-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}=Z_{1-\alpha}$$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar X-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}\le\frac{d^*_\alpha-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}\right)=1-\alpha$$

(המשך השיעור)

1. מה יהיה אזור הדחיה תחת $H_A:\mu>\mu_0$ ⇐ קיבלנו אזור דחיה $C^*_\alpha=[d^*_\alpha,\infty)$.

2. באופן דומה, עבור $H_A:\mu<\mu_0$ נבחר אזור דחיה מהסוג $C_\alpha=(-\infty,\mu_0+Z_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt n}]$

$Z_\alpha=-Z_{1-\alpha}$

3. מה נעשה אם $H_A:\mu\ne\mu_0$?

במקרה כזה, הפתרון המקובל הוא: $C^*_\alpha=(-\infty,\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt n}]\cup[\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt n},\infty)$.

(*) במקרה שה σ שונות לא ידועה נחליף את σ האמיתית של σ^2 ב $\hat\sigma^2$ ובכל המקומות בהם רשום Z נרשום במקום t_{n-1}.

במקרה הבינומי

4. $H_0:p=p_0$. אלטרנטיבה $H_A:p>p_0$, רוצים להשתמש ב- $S(\bar X)=\hat p$,
נניח נשתמש בקירוב הנורמלי. מהי כל ההנחות? מתי הקירוב הנורמלי טוב?
כל ההנחה דרוש להתקיים ש: p_0: $n(1-p_0)\ge10$, $10\le np_0$.

במקרה הזה אנחנו מבקשים תחת H_0 את שונות $\hat p$: $\hat p\sim N\left(p_0,\frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$
ולכן, תחת הקירוב הנורמלי, אזור הדחיה $C^*_\alpha=[p_0+Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\infty)$.

באופן דומה:

ב. $H_A:p<p_0$ נקבל אזור דחיה $C^*_\alpha=(-\infty,p_0-Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}]$

ג. $H_A:p\ne p_0$ נקבל אזור דחיה $C^*_\alpha=(-\infty,p_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}]\cup[p_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},+\infty)$

סוגי השערות

השערה פשוטה: השערה שכוללת ערך אחד בלבד של θ.
למשל: $H_0:\theta=\theta_0$, $H_0:\theta=4$, $H_A:\theta=\theta_A$

השערה מורכבת: השערה שכוללת אוסף ערכים (K) של θ.
למשל: $H_0:\theta\le0$, $H_0:\theta>\theta_0$, $H_A:\theta<0$, $H_A:\theta\ne0$

בקורס שלנו, נעסוק רק בהשערות אפס פשוטות ואלט' מדעין גם במורכבות בפשטות.

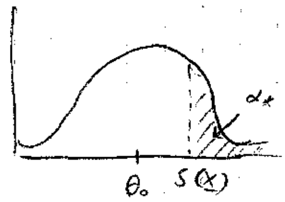
אלטרנטיבה $H_A: \theta > \theta_0$ תקרא <u>חד צדדית</u> ואלטרנטיבה $H_A: \theta \neq \theta_0$ תקרא <u>דו צדדית</u>.

<u>ערך P (P-Value)</u> זו רמת מובהקות של תוצאה.

נניח שאנו רוצים לבדוק $H_0: \theta=\theta_0$ מול אלטרנטיבה (נניח) $H_A: \theta>\theta_0$ בעזרת סטטיסטי $S(\underline{X})$.

אחרי שמתקבל <u>בפועל</u> מדגם $\underline{X}$ ותוצאות $S(\underline{X})$ (נניח), מה תהיה <u>הרמה המינימלית</u> α^* כך ש $S(\underline{X}) \in C_{\alpha^*}$.

(*) אנו חושבים שאם היינו לוקחים אזור שהשטח שלו גדול מ- α^* אז $S(\underline{X})$ היה בתוך האזור ולכן היינו דוחים את ההשערה H_0.



במקרה הנורמלי, שונות ידועה $H_0: \mu=\mu_0$, $H_A: \mu>\mu_0$.

אזי רמת המובהקות של התוצאה $S(\underline{X})=\bar{X}$, $\alpha^*(\bar{X})=1-\Phi\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$.

נדחה את H_0 בכל רמה שגדולה או שווה מ- $\alpha^*(\bar{X})$.

<u>חישוב</u>

$$\bar{X}=\mu_0+Z_{1-\alpha^*}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=Z_{1-\alpha^*}$$

$$\Phi\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=1-\alpha^*$$

<u>דוגמה:</u> גבהי סטודנטים, $\sigma^2=16$, $n=25$, $H_0: \mu=170$, $H_A: \mu>170$

נניח שקיבלנו $\bar{X}=175$ ..

$$\alpha(\bar{X})=1-\Phi\left(\frac{175-170}{\frac{4}{5}}\right)=1-\Phi(6.25)=2\times10^{-10}$$

(*) הערך הנמוך של α מרמז לנו שעבור ערכי מובהקות סטנדרטיים היינו דוחים את ההשערה כיוון שרק עבור מובהקות $\alpha\le 2\times10^{-10}$ לא היינו דוחים.

מה היה קורה אם היינו מניחים $\sigma^2=144$ במקום $\sigma^2=16$?

$$\alpha(\bar{X})=1-\Phi\left(\frac{175-170}{\frac{12}{5}}\right)=1-\Phi(2.08)=0.019$$

(*) קיבלנו תוצאה שאם היינו לוקחים $\alpha=0.05$ היינו דוחים את ההשערה, ואם היינו לוקחים במובהקות $\alpha=0.01$ לא היינו דוחים את ההשערה.

<u>השערות פשוטות:</u> סוגי טעויות ועוצמה

$H_0: \theta=\theta_0$ סטטיסטי $S(\bar{X})$

רמה α

$H_A: \theta=\theta_A$ אזור דחייה C_α

הגדרה: טעות מסוג I: הסיכוי לדחות את השערת האפס, אם היא בעצם נכונה.

$$Pr_{H_0}(S(\bar{X}) \in C_\alpha) \underset{\text{מוגדר מבחן}}{\overset{!}{=}} \alpha$$

הגדרה: טעות מסוג II: הסיכוי שלא נדחה את השערת האפס, אם האלטרנטיבה נכונה.

$$\beta := Pr_{H_1}(S(X) \notin C_\alpha) \overset{?}{=}$$ אי אפשר לדעת באופן כללי

הגדרה: עוצמת המבחן הוא הסיכוי שנדחה את השערת האפס, אם האלטרנטיבה נכונה.

$$\pi := Power := P_{H_1}(S(X) \in C_\alpha) = 1-\beta$$

דוגמא הפטינוטים:

$H_0: \mu = 170$, $H_A: \mu = 172$. רמת המבחן $\alpha = 0.05$. $\sigma^2 = 16$

$$C_\alpha = [170 + 1.645 \cdot \tfrac{4}{5}, \infty) = [171.3, \infty) \Leftarrow \alpha - P_{H_0}(\bar{X} \in C_\alpha) = P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-170}{4/5} \geq \frac{171.3-170}{4/5}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1.3}{4/5}\right) = 1 - \Phi(1.645) = 0.05$$

$$\beta = P_{H_1}(\bar{X} \notin C_\alpha) = P_{H_1}(\bar{X} \leq 171.3) = P_{H_1}\left(\frac{\bar{X}-172}{4/5} \leq \frac{-0.7}{4/5}\right) = \Phi\left(-\frac{0.7}{4/5}\right) = \underline{0.19}$$

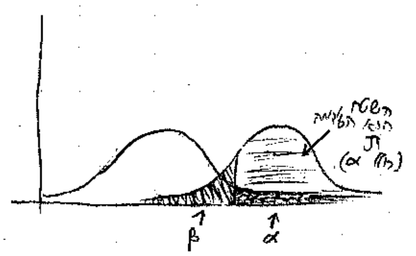
לכן עוצמת המבחן $\pi = P_{\mu=172}(\bar{X} > 171.3) = \Phi\left(\frac{0.7}{4/5}\right) = 0.81$.

שאלה: מה היה קורה ל-π אם היינו לוקחים $H_A: \mu = 175$?

$$\beta = Pr_{\mu=175}(\bar{X} < 171.3) = Pr_{\mu=175}\left(\frac{\bar{X}-175}{4/5} \leq \frac{-3.7}{4/5}\right) = \Phi\left(\frac{-3.7}{4/5}\right) = 2 \times 10^{-6} \Rightarrow \underline{\pi = 0.999978}$$

כלומר, אפשר להגיד שהמקרה השני הוא בעל בדיקת השערות טובה. אם האלטרנטיבה נכונה, סיכויינו לדחות גבוהים מאוד.

ננסה לתאר גרפית את ההגדרות:



במערכת מאמרי דח"ך, הלמה של ניימן-פירסון

עד עכשיו דנו בבחירת סטטיסטי מבחן ואזורי דחיה ברמה האינטואיטיבית. כלומר
ברור שרוצים לקחת כמה שיותר עוצמה כדי שהמבחן יהיה טוב.

ציין שאין אנו יודעים מראש (לפני התוצאות) איזו סטטיסט׳ יתנו לנו מבחנים בעוצמה גבוהה, ננסח את הדרישות שלנו על פי הסטטיסט׳ הללו היותר שקיים:
המייצגים כגון $\bar{X}$.

<u>הגדרה:</u> מבחן ברמה α בעל עוצמה מקסימלית להשערות הפשוטות: $H_0: \theta=\theta_0$, $H_A\ \theta=\theta_A$
הוא אזור דחיה C^*_α (עבור $\bar{X}$) כך שלכל אזור דחיה <u>אחר</u> ברמת α $\tilde{C}_\alpha$
מתקיים $\pi(C^*_\alpha) \ge \pi(\tilde{C}_\alpha)$,

כדי לנסח את הלמה של ניימן-פירסון שמגדירה את C^*_α נזכר בפונקצית <u>הנראות</u> ונגדיר
<u>יחס נראות:</u>

$$\Lambda(\underline{X}) = \frac{f_{\theta_0}(\underline{X})}{f_{\theta_1}(\underline{X})} \underset{\uparrow}{=} \frac{L(\theta_0;\underline{X})}{L(\theta_1;\underline{X})}$$

(יש המסמנים ב- $\lambda(\underline{X})$)

לפי הגדרת הנראות

<u>הלמה של ניימן ופירסון</u> (N-P)
מבחן בעל עוצמה מקסימלית להשערות שלמעלה מוגדר ע״י:

$$C^*_\alpha = \{\underline{X}\ \Lambda(\underline{X}) \le d^*_\alpha\}$$

כאשר d^*_α נקבע כך ש $P_{H_0}(C^*_\alpha)=\alpha$.

<u>דוגמה:</u> התפלגות הנורמלית, שונות ידועה.

$H_0: \mu=\mu_0$, $H_A: \mu=\mu_A$ ($\mu_A > \mu_0$).

$$L(\mu_0;\underline{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\sum(x_i-\mu)^2/2\sigma^2\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{n\bar{x}\mu_0}{\sigma^2}\right\}$$

$$L(\mu_1;\underline{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{n\mu_A^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{n\bar{x}\mu_A}{\sigma^2}\right\}$$

$$\Lambda(\underline{X}) = \underbrace{\frac{\exp\left\{\frac{-n\mu_0^2}{2\sigma^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{n\mu_A^2}{2\sigma^2}\right\}}}_{\text{אין השפעה ל-}x\text{ נקרא לו }c_1} \cdot \exp\left\{\frac{n\bar{x}(\mu_0-\mu_A)}{\sigma^2}\right\}$$

$$\frac{\partial \Lambda(\underline{X})}{\partial \bar{x}} = \underset{>0}{c_1} \cdot \underbrace{\frac{n(\mu_0-\mu_A)}{\sigma^2}}_{<0} \cdot \underbrace{\exp\left\{\frac{\mu_0-\mu_A}{\sigma^2} n\bar{x}\right\}}_{>0} < 0$$

⇐ ערכים גבוהים של $\bar{X}$ יתנו ערכים נמוכים של יחס הנראות.

⇐ אזור הדחיה של מבחן N-P הוא מהסוג: $C^*_\alpha = \{\underline{X}: \bar{X} \ge d^*_\alpha\}$

⇐ אותו אזור דחיה שהגדרנו אינטואיטיבית.

התוצאה שלנו היא

$$\Lambda(y_2) < \Lambda(y_1) < \Lambda(y_3)$$