אנליזה נומרית - שיעור 13

פולינומי צ'בישב Chebyshev

$$T_n(x)=\cos(n\cdot\cos^{-1}(x)) \qquad ,x\in[-1,1]$$

$$T_0=1,\quad T_1=x$$

$$T_{n+1}=2\cdot x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)$$

תכונות

1. $T_n(x)\leq 1$ - כי זה $\cos$

2. $T_n=2^{n-1}\cdot x^n+l.o.t$ ← low order terms

3. $n\cdot\phi=k\cdot\pi \Leftrightarrow T_n(x)=\pm1$

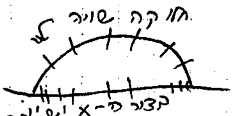
$$\cos^{-1}(x)=\phi=\frac{\pi k}{n}$$

$$\Leftrightarrow x_k=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{n}\right)$$

לכן יש $n+1$ נקודות אקסטרמום (מינימום/מקסימום/נקודת פיתול)

נגיד ב-$T_0=1$ אין נקודות אפס 1.
ב-$T_1=x$ 2 נק' אפס
וכך הלאה לפי הנוסחה הרקורסיבית

4. בין 2 נק' אקסטרמום יש נק' 0. לכן יש n אפסים פנימיים.



$$x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\qquad k=1,\dots,n$$

$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}$ עבור $\theta<<1$ אם קרוב ל-0 יש דחיסה של נק'

מאחר והמקדם של x^n הוא 2^{n-1}.

$$T_n(x)=2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

אם משתמשים ב-T_n אז אין שגיאת הפעלת הקצוות כמו כשמשתמשים ב-w.
בצ'בישב תמיד חסום ע"י 1. ואז נוכל כי $w=\frac{T_n}{2^{n-1}}$ וזה שואף לאפס מאוד קטן כי מחלקים.

<u>משפט:</u> מבין כל הפולינומים P_n ממעלה $n\geq1$, שהמקדם של x^n הוא 1.

ל- $2^{-(n-1)}\cdot T_n$ יש את הערך המוחלט המקסימלי הקטן ביותר בקטע $[-1,1]$.

<u>כלומר:</u>
$$\min\left(\max_{x\in[-1,1]}|P_n(x)|\right)=\max_{x\in[-1,1]}\left|2^{-(n-1)}\cdot T_n\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$$

<u>הוכחה:</u>

ראינו ש- $T_n(x)/2^{n-1}$ מקבל ערכים $\pm2^{-(n-1)}$ ב-$(n+1)$ נקודות ב-$[-1,1]$

נניח בשלילה שקיים P_n עם מקדם 1 ל-x^n כך ש- $|P_n|<\frac{1}{2^{n-1}}\ \forall x\in[-1,1]$

נתבונן בנקודות (נסמנן x_0, x_1, x_2) שבהן T_n מקבל ערך אקסטרמלי:

$$P_n(x_0)<2^{-(n-1)}\cdot T_n(x_0)=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P_n(x_1)>2^{-(n-1)}\cdot T_n(x_1)=-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P_n(x_2)<2^{-(n-1)}\cdot T_n(x_2)=\frac{1}{2^{n-1}}$$

<u>נגדיר:</u>
$$Q(x)=P_n(x)-\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Q - פולינום ממעלה $n-1$. כי המקדם של x^n ב-P_n הוא 1 וב-T_n הוא 2^{n-1} ולכן מצטמצם עם המכנה, ולכן x^n מצטמצם.

אבל $Q(x_0)<0$, $Q(x_1)>0$, $Q(x_2)<0$

(x_0) ... $P_n(x)$ ולכן מתקבל ב-Q שקטן מ-$\frac{1}{2^{n-1}}$

$\Longrightarrow$ לכן ל-$Q(x)$ יש n אפסים בקטע לפי ערך הביניים.
כי יש $n+1$ נקודות
אבל הדרגה של Q היא $\leq n-1$

$\Longrightarrow Q\equiv 0$. סתירה. כי זה לא פולינום נוסף! P_n יוצא שווה לפולינום $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$

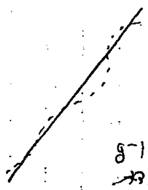
$$f-p_n=e_n=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot w=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot\underbrace{\frac{T_n}{2^{n-1}}}_{w}$$

לפי (*) : $w=\frac{T_n}{2^{n-1}}$ $\longrightarrow$ $w=\prod_j (x-x_j)$ עם כיווני בחירה קק של w הכי

ב-w הכי קטן זה כשמשתמשים ב-$\frac{T_n}{2^{n-1}}$ של צ'בישב.

מבנית-פתוח דועה לגעת עבין. להבין קודם מה הוא עושה.

קירוב ריבועים מינימליים Least-Squares



-תהי מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_a^b fg\,dx$

מכפלה פנימית דיסקרטית. f ו-g נתונים ע"י נקודות: $\langle f,g\rangle=\sum_{j=0}^{M} f_j\cdot g_j$

רוצים לקרב $f=\sum_j \alpha_j\phi_j$.

ייתכן כי ϕ_j זה פולינומים.

נמצא α_j כך ש- $\|f-\sum\alpha_j\phi_j\|$ יהיה מינימלי

מחפש נק' מינימום: $0=\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\langle f-\sum\alpha_j\phi_j,\ f-\sum\alpha_j\phi_j\rangle$

$$0=\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\langle f,f\rangle-2\cdot\langle f,\sum\alpha_j\phi_j\rangle+\langle\sum\alpha_j\phi_j,\sum\alpha_j\phi_j\rangle\right)$$

צריכים לגזור שני הביטויים ולכן זה במקום וגזור.

$$0=(-2)\cdot\langle f,\phi_j\rangle+2\cdot\langle\phi_j,\sum_{k=0}^{M}\alpha_k\cdot\phi_k\rangle$$

שינוי האינדקסים לא צרי כדי לא להתבלבל.

$$0=(-2)\cdot\langle f,\phi_j\rangle+2\cdot\sum\alpha_k\langle\phi_j,\phi_k\rangle\ \Big|:2$$

$$0=-\langle f,\phi_j\rangle+\sum\alpha_k\cdot\langle\phi_j,\phi_k\rangle$$

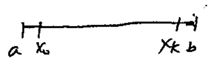
עבור j מסוים: $j=0\ldots M$

j: $\langle f,\phi\rangle=\langle\phi,\phi_0\rangle\cdot\alpha_0+\langle\phi,\phi_1\rangle\cdot\alpha_1+\ldots+\langle\phi,\phi_M\rangle\cdot\alpha_M$

$\Downarrow$ ופותר את המשוואה עם ערכי j מ-0 עד M.

$$\begin{pmatrix}\langle\phi_0,\phi_0\rangle & \langle\phi_0,\phi_1\rangle & \ldots & \langle\phi_0,\phi_M\rangle\\ \langle\phi_1,\phi_0\rangle & \ldots & \ldots & \langle\phi_1,\phi_M\rangle\\ \vdots & & & \vdots\\ \langle\phi_M,\phi_0\rangle & \ldots & \ldots & \langle\phi_M,\phi_M\rangle\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle f,\phi_0\rangle\\ \vdots\\ \langle f,\phi_M\rangle\end{pmatrix}$$

$$\langle f,\phi_j\rangle=\sum_{l=0}^{k} f_l\cdot\phi_l\cdot w_l \qquad f_l=f(x_l) \qquad l=0,\ldots,k$$



עבור $k\leftarrow$ מספר הנקודות גדל.

משפט: $\mu\in C^1(-\infty,\infty)$ $\mu(x)=\mu(x+2\pi)$ אז $\mu(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\mu}(k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$

כאשר: $\hat{\mu}(k)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-ikx}\mu(x)\,dx$

אין שום קשר בין $\hat{u}(k)$ ל- $\hat{u}(k+1)$ או $\hat{u}(k-1)$ $\qquad \hat{u}(k) \quad k=0,\pm1,\pm2$

הגדרה:

$$\langle u,v\rangle = \int_0^{2\pi} \bar{u}\cdot v\,dx$$

$\bar{u}$ — כי אנחנו עם מרוכבים

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\ell x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right\rangle = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\ell x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\,dx = \delta_{\ell k}$$

שווה ל-1 רק ש- $\ell=k$.

ובאמת אם נעשה יוצא סגורה

נרצה להפוך משוואה דיפרנציאלית למשוואה אלגברית:

מוטיבציה $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}e^{\alpha x} = \alpha\cdot e^{\alpha x}$.

משוואה דיפרנציאלית: $\quad u_t + u_{xx} = 0$ אז $\alpha^2+1=0$ (ניתן להציג ש) אז $u=e^{\alpha x}$.

אם u לא רציפה, כשננסה לקרב אותה לא נקבל התכנסות נקודתית אלא נקבל תנודות. $\leftarrow$ תופעת גיבס

אי-שוויון Bessel:

$$\langle u,u\rangle \ge S_N = \sum_{k=-N}^{N}|\hat{u}_k|^2$$

שוויון פרסבל Parseval:

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{u}_k|^2$$

משפט: אם $u(x)=u(x+2\pi)$, $u\in C^{p-1}(-\infty,\infty)$ הנגזרת ה-p של u חלקה למקוטעין

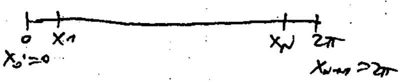
התכונה של $\quad |\hat{u}| \le \dfrac{C}{1+|k|^{p+1}}$

הנוסחאות המתאימות:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{u}(k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{ikx}$$

$$\hat{u}(x) = \int_0^{2\pi}u(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-ikx}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N}\tilde{u}(k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$$



$$h=\frac{2\pi}{N+1}, \quad x_j = j\cdot h, \quad j=0\ldots N$$

$$u(x_j) = \sum_{k=0}^{N}\tilde{u}_k\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{i\cdot k\cdot x_j}$$

① מטריצת וונדרמונדה.

$$\underbrace{\sqrt{\frac{h}{2\pi}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & & 1\\ 1 & e^{ih} & e^{2ih} & \cdots & e^{iNh}\\ \vdots & e^{2ih} & e^{4ih} & \cdots & e^{2iNh}\\ \vdots & & & & \\ 1 & e^{iNh} & \cdots & & e^{iN^2h}\end{pmatrix}}_{F}\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \vdots\\ \tilde{u}_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u(x_0)\\ \vdots\\ u(x_N)\end{pmatrix}$$

1. מטריצה מסוג $\quad F^*F = FF^* = I$

המטריצה הזו קלה להפוך (וכו)

$$F^* = (\bar{F})^T$$

הפיכת המטריצה מהירה ויציבה. אין בעיה לחשב זאת. (לא שאני יודעת למה..)

② שיטת המלבן.

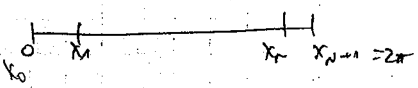
$$\hat{u}(k) = \int_0^{2\pi}u(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-ikx}$$

$$\hat{u}(k) \approx \sum_{j=0}^{N}u(x_j)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-ikx_j}\cdot h$$

חישוב לפי

זה לא רק המלבן, זה יכול להיות הטרפז

$$= \frac{u(x_0)}{2\sqrt{2\pi}}\cdot 1\cdot h + \sum_{j=1}^{N}u(x_j)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_j}\cdot h + \frac{u(x_{N+1})}{2\sqrt{2\pi}}\,h$$



זה המרכז.

זה הקצוות

חישוב לפי טרפז

ומסתבר שהשגיאה היא לא h בריבוע כמו של מלבן אלא משהו יותר.

שגיאת הקונבולוציה:

$$\left.\begin{array}{l} \mu \neq \tilde{\mu} \\ k = \mu + (N+1)\cdot \nu \end{array}\right.$$

$$\mu(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}_k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx_j} =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{N} \hat{\mu}_{\mu+(N+1)\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{i\cdot(\mu+(N+1)\cdot\nu)\cdot x_j} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{N} \Big[\hat{\mu}_\mu \cdot e^{i\mu x_j} + \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu\neq 0}}^{\infty} \hat{\mu}_{\mu+(N+1)\nu} \cdot e^{i(\mu+(N+1)\nu)x_j} \Big]$$

משפט עזר: $i\cdot(N+1)\cdot\nu\cdot x_j = i\cdot(N+1)\nu\cdot j\cdot h =$

$$= i\cdot \cancel{(N+1)} \cdot \frac{2\pi}{\cancel{N+1}} \cdot \nu\cdot j = 2\pi \cdot i\cdot \nu\cdot j$$

$$\Downarrow$$

$$e^{i\cdot(N+1)\cdot\nu x_j} = 1$$

$\tilde{\mu}$ קירוב נומרי ל-$\hat{\mu}$

$$\mu(x_j) = \underbrace{\sum_{\mu=0}^{N} \Big[\hat{\mu}_\mu + \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu\neq 0}}^{\infty} \hat{\mu}_{\mu+(N+1)\nu} \Big]}_{\tilde{\mu}_\mu} \cdot e^{i\mu x_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$