

סיכום נקודות בלוגיקה

תזכורות ממתטיקה בדידה

מיו μ – קשר $(\mu n. A)$ שמשמעותו ה-n הטבעי הראשון שמקיים את A.

איוטה ι – קשר $(\iota x. A)$ שמשמעותו ה-x היחיד המקיים את A.

$A \Delta B$ (ההפרש הסימטרי) – כל האיברים שנמצאים בדיוק באחת מהקבוצות A ו-B.

ניתן להתייחס לפונקציה כחס המקיים תנאי החד-ערכיות: $\forall a, b_1, b_2. \langle a, b_1 \rangle \in f \wedge \langle a, b_2 \rangle \in f \rightarrow b_1 = b_2$.

פונקציה חלקית מ-A ל-B היא יחס מ-A ל-B המקיים את תנאי החד-ערכיות הנ"ל.

פונקציה מ-A ל-B היא פונקציה חלקית f מ-A ל-B המקיימת:

$$\forall a \in A \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in f$$

אם R הוא יחס, אז **היחס ההפוך** R^{-1} מוגדר ע"י

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

$R \circ S$ הרכבה של יחסים המוגדרת

$$R \circ S = \{ \langle a, c \rangle \in AC \mid \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in S \wedge \langle b, c \rangle \in R \}$$

יחס R על קבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם $\forall x \in A. xRx$.

יחס R נקרא **אי רפלקסיבי** אם $\forall x. \neg(xRx)$.

אם מתקיים $\forall x \in A. \neg(xRx)$, היחס נקרא **אי רפלקסיבי על A**.

יחס R נקרא **טרנסיטיבי** אם $\forall x \forall y \forall z. xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.

יחס R נקרא **סימטרי** אם $\forall x \forall y. xRy \rightarrow yRx$,

אנטי סימטרי חזק אם $\forall x \forall y. xRy \rightarrow \neg(yRx)$

ואנטי סימטרי (חלש) אם $\forall x \forall y. xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$.

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי** על A אם הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

יחס סדר חלקי יקרא **מלא** על A אם מתקיים גם כי $\forall x \in A \forall y \in A. xRy \vee yRx$.

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי חזק** על A אם הוא טרנסיטיבי ואי רפלקסיבי על A.

יחס כזה יקרא **מלא** על A אם מתקיים $\forall x \in A \forall y \in A. xRy \vee yRx \vee x = y$.

יחס R יקרא **שקילות** על A אם הוא רפלקסיבי על A, סימטרי וטרנזיטיבי.

אם R הוא יחס שקילות, **מחלקת השקילות** של x לפי R היא $[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$.

אם R יחס שקילות על A, **קבוצת המנה** של R על A היא $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$.

R יחס סדר על A. ההגדרות יחסית ל-A.
רפלקסיבי $\forall a \in A. aRa$
אי רפלקסיבי $\forall a \in A. \neg(aRa)$
סימטרי $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \rightarrow bRa$
אנטי סימטרי $\forall a \in A \forall b \in A. (aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b$
אנטי סימטרי חזק $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \rightarrow \neg(bRa)$
טרנסיטיבי $\forall a, b, c \in A. (aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$
יחס סדר חלקי R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי
יחס סדר מלא R יחס סדר חלקי ובנוסף מתקיים $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \vee bRa$
יחס סדר חלקי חזק R אי רפלקסיבי וטרנזיטיבי
יחס סדר מלא חזק R יחס סדר חלקי חזק ובנוסף מתקיים $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \vee a = b \vee bRa$
יחס שקילות R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי
מחלקת שקילות $[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$
קבוצת מנה $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

לוגיקה

יחס נביעה \vdash היא יחס בין קבוצות של נוסחאות לנוסחאות המקיים "**רפלקסיביות**" ($A \in T \rightarrow T \vdash A$),

מונוטוניות (אם $T \vdash A$ וגם $T \subseteq S$ אז $S \vdash A$) ו"**טרנסיטיביות**" (אם $T \vdash \phi$ ו- $T \vdash \psi \rightarrow \phi$ אז $T \vdash \psi$).

תחשיב הפסוקים הקלאסי (CPL)

מוגדר מעל הא"ב: פסוקים אטומיים (p_1, p_2, p_3, \dots) , קשרים $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ וסוגריים. הקטגוריה הסינטקטית היא נוסחה (או פסוק) כאשר

1. כל פסוק אטומי הוא נוסחה.

2. אם ϕ, ψ נוסחאות אז $(\phi \rightarrow \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), \neg \phi$ – נוסחאות.

טענות על נוסחאות ב-CPL (להוכחה שמשווא אינו נוסחה): מספר הסוגרים הימיניים והשמאליים שווה, בין כל 2 פסוקים אטומים מופיע קשר, קשר "וגם" אינו יכול להופיע בצמוד לסוגר, מספר הסוגיים השמאליים שווה למספר הקשרים הבינאריים, מילה ב-CPL אינה מתחילה בסוגר ימיני.

הגדרה סמנטית לנביעה – ב-CPL ה"מבנה" נקרא "השמה" (פונקציה v מקבוצת הנוסחאות אל $\{t, f\}$ המקיימת:

$$\neg \phi = v(\neg \phi), v(\phi \vee \psi) = v(\phi) \vee v(\psi), v(\phi \wedge \psi) = v(\phi) \wedge v(\psi), v(\phi \rightarrow \psi) = \neg(v(\phi)) \vee v(\psi).$$

היא פונקציה האמת המתאימה ל-x).

נוסחה תקרא **טאוטולוגיה** (סימון $\vdash_{CPL} \varphi$) אם כל השמה היא מודל שלה.
 למה: $\varphi \vdash_{CPL} \varphi \leftrightarrow \vdash_{CPL} \varphi$ (כי כל השמה היא מודל של הקבוצה הריקה).

תורה **ספיקה** אם יש לה מודל. בהתאם, תורה **אי ספיקה** היא תורה שאין לה מודל. **פסוק** ללא מודל נקרא **סתירה**.
 פסוקים A, B **שקולים לוגית** אם לכל השמה v מתקיים $v[A]=t$ אם $v[B]=t$.

נשים לב ש**טאוטולוגיה** נובעת מכל תורה ושכל נוסחה נובעת מנוסחה שהיא **סתירה**.

טענה: פסוקים A, B שקולים לוגית אם $\vdash_{CPL} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

טענה: יהי A פסוק ו- v', v השמות כלשהן. אם לכל $p \in At[A]$ מתקיים $v'[p]=v[p]$ אז $v'[A]=v[A]$ (אינדוקציה מבנית).

קבוצת הנוסחאות האטומיות של φ מוגדרת כך:

- $At[p] = \{p\}$
- $At[-\varphi] = At[\varphi]$
- $At[(\varphi \circ \psi)] = At[\varphi] \cup At[\psi]$ עבור $\circ = \{v, \wedge, \rightarrow\}$.

קבוצת תת הנוסחאות של A מוגדרת כך:

- $Sf[p] = \{p\}$
- $Sf[-A] = Sf[A] \cup \{A\}$
- $Sf[(A \circ B)] = Sf[A] \cup Sf[B] \cup \{(A \circ B)\}$ עבור $\circ = \{v, \wedge, \rightarrow\}$.

הצבה: אם φ, A נוסחאות ו- p פסוק אטומי, אז $\varphi \left\{ \frac{A}{p} \right\}$ הינו הפסוק המתקבל מ- φ ע"י הצבת A במקום p ומוגדר כך:

- אם $\varphi = p$ אז $\varphi \left\{ \frac{A}{p} \right\} = A$
- אם $\varphi = q$ כאשר $q \neq p$ אז $\varphi \left\{ \frac{A}{p} \right\} = q$
- אם $\varphi = -\psi$ אז $\varphi \left\{ \frac{A}{p} \right\} = -\psi \left\{ \frac{A}{p} \right\}$
- אם $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ אז $\varphi \left\{ \frac{A}{p} \right\} = (\psi_1 \left\{ \frac{A}{p} \right\} \circ \psi_2 \left\{ \frac{A}{p} \right\})$ עבור $\circ = \{v, \wedge, \rightarrow\}$.

הערה: $\left\{ \frac{A}{p}, \frac{B}{q}, \dots \right\}$ מצוין הצבה **סימולטנית**.

משפט ההצבה: יהיו φ נוסחה, v השמה, q_1, \dots, q_n נוסחאות אטומיות שונות זו מזו ו- A_1, \dots, A_n נוסחאות (לא בהכרח שונות). תהי v' השמה כך שאם $p=q_i$ אז $v'(p)=v(A_i)$. אחרת, $v'(p)=v(p)$. אזי $v'(\varphi) = v(\varphi \left\{ \frac{A_1/p_1, \dots, A_n/p_n}{p} \right\})$.

טענה: אם v', v השמות כך ש- $v'(p)=v(p)$ לכל $p \in At[\varphi]$ אז $v'(\varphi)=v(\varphi)$ (הוכחה באינדוקציה מבנית).

טענה: אם $A \vdash_{CPL} T$ ו- σ **הצבה** אז $\sigma(T) \vdash \sigma(A)$.

משפט ההחלפה: נניח v השמה, A נוסחה ו- p פסוק אטומי, נגדיר השמה v' כך שאם $q=p$ אז $v'[q]=v[A]$, אחרת $v'[q]=v[q]$ (פסוק אטומי). אז לכל פסוק B מתקיים $v'[B]=v[B\{A/p\}]$.

רדוקציות לשאלת נביעה

- $T \vdash_{CPL} \varphi$ אם $T \cup \{-\varphi\}$ אינה ספיקה.
- לתורות סופיות $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \vdash_{CPL} \varphi$ אם הפסוק $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ הוא טאוטולוגיה.

משפט הקומפקטיות

1. T ספיקה אם כל קבוצה סופית חלקית שלה היא ספיקה.
2. $T \vdash_{CPL} \varphi$ אם יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש- $\Gamma \vdash_{CPL} \varphi$.

הגדרה סינטקטית לנביעה – $T \vdash_{HPC} \varphi$ אם ל- φ יש הוכחה מ- T .

הוכחה של פסוק φ מתורה T ב- HPC היא סדרה סופית של פסוקים כך שהפסוק האחרון בסדרה הוא φ . כל איבר בסדרה הוא אקסיומה של HPC , איבר של T או פסוק שמתקבל משני פסוקים קודמים בסדרה בעזרת היסק MP .

טענה: $T \vdash_{HPC} \varphi$ אם יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש- $\Gamma \vdash_{HPC} \varphi$.

תורה T תקרא **קונסיסטנטית** ב-HPC אם אין פסוק A כך שגם $T \vdash_{HPC} A$ וגם $T \vdash_{HPC} \neg A$. בניסוח אחר, קיים פסוק A כך ש $T \not\vdash_{HPC} \neg A$.

משפט הנאותות והשלמות - $\vdash_{CPL} = \vdash_{HPC}$. הוכחת **נאותות** ($\vdash_{HPC} \rightarrow \vdash_{CPL}$) מוכיחים באמצעות אינדוקציה על אורך ההוכחה. הוכחת **שלמות** ($\vdash_{CPL} \rightarrow \vdash_{HPC}$) היא ארוכה ומציקה (שיעור 4 בסיכומים של אברון). נוסח ב' למשפט השלמות: T היא תורה ספיקה ב-CPL אם T היא קונסיסטנטית ב-HPC.

טענה: אם לכל פסוק A ב- T_1 מתקיים $T_2 \vdash_{HPC} A$ אז לכל פסוק B , אם $T_1 \vdash_{HPC} B$ אז $T_2 \vdash_{HPC} B$.

משפט הדדוקציה הסמנטי - $T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$ אם $T \vdash_{CPL} A \rightarrow B$.

משפט הדדוקציה הסינטקטי - $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$ אם $T \vdash_{HPC} A \rightarrow B$ (אינדוקציה על ההוכחה). המשפט נכון עבור כל מערכת נוסח הילברט בה קיימות האקסיומות 11 ו-12 ו-MP הוא כלל ההיסק היחיד עבור שפה עם קשר הגרירה.

דדוקציה טבעית - נאמר ש $T \vdash_{NDC} A$ אם קיימת $\Gamma \Rightarrow A$ ש הוכחה ב-NDC.

שקלויות לוגיות - $A \leftrightarrow B =_{DF} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

שני פסוקים יקראו **שקולים לוגית** ($A \equiv B$) אם $\vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$.

משפט הצבת אקויוולנטים: אם $T \vdash A \leftrightarrow B$ אז לכל נוסחה φ ופסוק אטומי p מתקיים $\vdash_{CPL} \varphi\{A/p\} \leftrightarrow \varphi\{B/p\}$.

נוסחה היא בצורת **NNF** אם קשר השלילה מופיע רק לפני פסוקים אטומיים. **ליטרל** זהו פסוק אטומי או שלילתו. פסוק ב**DNF** הוא "או'ים של 'וגם'ים" ופסוק ב**CNF** הוא "וגם'ים של 'או'ים". כל פסוק אפשר להעביר לפסוק שקול ב**NNF**, והן להביא לצורת **DNF** ו**CNF**.

הגדרה נניח φ פסוק כך ש- $At(\varphi) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. נגדיר את $g_\varphi^{p_1, \dots, p_n}$ בתור הפונקציה מ- $\{t, f\}^n$ אל $\{t, f\}$ המוגדרת ע"י $g_\varphi^{p_1, \dots, p_n}(m_1, \dots, m_n) = v(\varphi)$ כאשר $m_i \in \{t, f\}$ לכל i ו- v השמה כך ש- $v(p_i) = m_i$.

טענה: לכל $f: \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$ ניתן למצוא נוסחא φ כך ש- $f = g_\varphi^{p_1, \dots, p_n}$. מהטענה נובע כי $\{-, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ מספיקים להגדרת כל פונקציה מ- $\{t, f\}^n$ אל $\{t, f\}$.

מציאת נוסחה לפונקציה: נסתכל בטבלת האמת של הפונקציה. עבור צורת **DNF**, עבור כל שורה בה הפונקציה מקבלת t , נרשום הסגרי "או" (שיחברו יחד ע"י "וגם") לפי ערכי האמת של הפסוקים האטומים באותה השורה (אם p קיבל ערך t נרשום בהסגר p , אם קיבל f נרשם $\neg p$). עבור צורת **CNF**, נמצא צורת **DNF** אך עבור השורות שמקבלות f ואז נהפוך "או" ל-"וגם", "וגם" ל-"או" וליטרל עם שלילתו (תרגול 6)

קבוצת **קשרים** S תקרא **שלמה פונקציונאלית** אם לכל פונקצית אמת f ישנה נוסחה A מעל $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ כך ש- A מעל S ו- $g_A^p = f$.

לוגיקה רב ערכית

במקום שני ערכי אמת, יש קבוצה של ערכי אמת S היכולה להיות אינסופית. מגדירים גם קבוצת ערכים מצוינים D כך ש- D אינה ריקה ומוכלת **ממש** ב- S . לכל קשר n -מקומי מגדירים פונקצית אמת מתאימה. השמה מוגדרת להיות פונקציה מקבוצת הנוסחאות אל S , המכבדת את טבלאות האמת החדשות. השמה v תהיה מודל של נוסחא A אם $v(A) \in D$.

תחשיב הפרדיקטים

סיגנטורה של שפה – מכילה סימני קבועים, סימני פונקציה ו**לפחות סימן יחס אחד**.

שם עצם – יכול להיות קבוע, **משתנה**, או $f(t_1, \dots, t_n)$ (כאשר f סימן פונקציה ו- t_1, \dots, t_n שמות עצם).
נוסחא – יכולה להיות $p(t_1, \dots, t_n)$ (כאשר p סימן יחס ו- t_1, \dots, t_n שמות עצם), $\neg A$, $(A \diamond B)$ (כאשר $\diamond \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$) ו- A, B נוסחאות) או $\forall x. A, \exists x. A$ (כאשר x משתנה ו- A נוסחא).

הצבה (סימון $\varphi\{s/x\}$, שם עצם, x משתנה)

שמות עצם – עבור t קבוע: $t\{s/x\} = t$, עבור t משתנה השונה מ- x : $t\{s/x\} = t$, עבור t משתנה השווה ל- x :
 $t\{s/x\} = f(t_1\{s/x\}, \dots, t_n\{s/x\})$ (כאשר f פונקציה n מקומית):

נוסחאות – עבור סימני יחס וקשרים, "מכניסים" את ההצבה "פנימה". עבור כמתים, "מכניסים פנימה" רק אם x אינו קשור ע"י הכמת.

אם x, y משתנים שונים, s ו- t ש"ע, A נוסחה ו- t חופשי להצבה עבור x ב- A אז $A\{t/x\}\{s/y\} = A\{[t\{s/y\}]/x, s/y\}$.

קבוצת המשתנים החופשיים

שמות עצם – $Fv[c] = \emptyset$ (קבוע), $Fv[x] = x$ (משתנה), $Fv[f(t_1, \dots, t_n)] = Fv[t_1] \cup \dots \cup Fv[t_n]$ (כאשר f סימן פונקציה ו- t_1, \dots, t_n שמות עצם).

נוסחאות - $Fv[p(t_1, \dots, t_n)] = Fv[t_1] \cup \dots \cup Fv[t_n]$ (p סימן יחס ו- t_1, \dots, t_n שמות עצם), $Fv[-A] = Fv[A]$, $Fv[\forall x.A] = Fv[\exists x.A] = Fv[A]/x$, ($\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ נוסחאות, A, B) $Fv[(A \diamond B)] = Fv[A] \cup Fv[B]$ (נוסחא).
 A , משתנה x) $Fv[\forall x.A] = Fv[\exists x.A] = Fv[A]/x$, ($\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ נוסחאות, A, B) $Fv[(A \diamond B)] = Fv[A] \cup Fv[B]$

שם עצם t יקרא **שם עצם סגור** אם $Fv[t] = \emptyset$. נוסחא A תקרא **פסוק** אם $Fv[A] = \emptyset$.

סמנטיקה בשפות מסדר ראשון

מבנה הוא זוג סדור $\langle D, >$ בו D הוא קבוצה לא ריקה שנקראת **התחום** ו- I היא פונקציה שהתחום שלה הוא הסיגנטורה ומקיימת את הדרישות: $I[c] \in D$ (c קבוע), $I[f]: D^n \rightarrow D$ (f סימן פונקציה) ו- $I[p] \subseteq D^n$ (p סימן יחס n-מקומי).
 פונקציה מקבוצת המשתנים של השפה אל D נקראת **השמה** במבנה $\langle D, >$. מרחיבים את מושג ההשמה בצורה הבאה:
 $v[c] = I[c]$ (c קבוע), $v[f(t_1, \dots, t_n)] = I[f](v[t_1], \dots, v[t_n])$ (f סימן פונקציה ו- t_1, \dots, t_n שמות עצם).

זוג M, v בו M הוא מבנה ו-v היא השמה יקרא **t-מודל** של נוסחא A אם $M, v \models A$.

נוסחא A תקרא **תקפה** במבנה M ($M \models A$) אם $M, v \models A$ לכל השמה v. M יקרא **v-מודל** של A. נוסחא A תקרא **תקפה לוגיקת** אם היא תקפה בכל מבנה. נוסחא A תקרא **t-תקפה לוגית** אם $\emptyset \vdash_{FOL}^v A$ (בעצם אין לכך משמעות כי \emptyset מורכבת מפסוקים).

זיהרות בולען: לא מתקיים $M \models -A$ אם $M \models A$!

סגור של נוסחא A הוא כל פסוק מהצורה $\forall x_1 \dots \forall x_n A$ כאשר $Fv[A] = \{x_1, \dots, x_n\}$. נשים לב שסגור 'A של נוסחא A תמיד יהיה פסוק. בנוסף, 'A v-שקול לוגית ל-A ($A \vdash_v A'$ ו- $A' \vdash_v A$).

תכונות נביעה

- $\vdash_t \subseteq \vdash_v$
- אם T מורכבת מפסוקים אז $T \vdash_v A \rightarrow T \vdash_t A$.
- **כלל ההכללה וכלל ההצבה נכונים עבור v-נביעה:** לפי כלל ההכללה מתקיים $A \vdash_v \forall x.A$ אבל בדר"כ $A \not\vdash_t \forall x.A$. לפי **עקרון ההצבה** מתקיים $A \vdash_v A\{t/x\}$ (עבור t חופשי להצבה במקום x) אבל בדר"כ $A \not\vdash_t A\{t/x\}$.
- **תכונת הדדוקציה נכונה עבור t-נביעה** (ועבור v-נביעה כש-T מורכבת מפסוקים).

להשלים

תכנות ספיקות

- אם T v-ספיקה אז T גם t-ספיקה.
- אם T מורכבת מפסוקים אז T היא t-ספיקה אם"ם היא v-ספיקה.
- T v-ספיקה אם"ם $\forall T$ היא ספיקה.
- $T \cup \{A\}$ היא t-ספיקה אם"ם $T \not\vdash_t -A$.

להשלים

בנק דוגמאות

1. "אם $A \rightarrow B$ ו-A ספיקות אז B ספיקה" (CPL) - דוגמה נגדית: $A=p$ ו- $B = (q \wedge -q)$.
2. דוגמה נגדית המוכיחה $\vdash_t \not\subseteq \vdash_v$: $\vdash_v \forall x.p(x)$ אבל $\not\vdash_t \forall x.p(x)$.
3. דוגמה נגדית המוכיחה שאם תורה היא t-ספיקה **לא בהכרח v-ספיקה**: $T = \{p(x) \wedge -p(y)\}$.
4. דוגמה נגדית המראה שאם $M \models -A$ זה לא אומר ש-M $\models A = p(x, y) \wedge \exists x. -p(x, x)$. בדוגמה זו מוכיחים כי $A \not\vdash_v$ אבל גם A לא v-ספיקה.