26/4/09 אנליזה נומרית - שיעור 6

בשיעור שעבר: $Ax=b$

$$k_{abs} = \sup \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta b\|} = \|A^{-1}\|$$

$$k = \sup \underbrace{\frac{\|\Delta x\|/\|x\|}{\|\Delta b\|/\|b\|}}_{(\text{ב-}\Delta x)} = \|A\|\,\|A^{-1}\|$$

זה נותן לנו מדד לכמה השגיאה יכולה להיות מוגדלת מהשגיאה ב-b.

ראינו את שיטת האלימינציה של גאוס ולאחר מכן את שיטת LU:

רוצים להגיע למצב $A=LU$

$$L_3L_2L_1A=U$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{(L_3L_2L_1)^{-1}}_{L}U$$

ראינו ש-L משולשית תחתונה.

לפתור את $Ax=b$ זה בסדר גודל של n^3 וגם שיטת גאוס.

<u>בעיות</u>

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 2 \end{pmatrix}$$

נפתור זאת בשיטת האלימינציה של גאוס:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{R_2 \leftarrow R_1-R_2}{\overset{R_1 \leftarrow R_1/\varepsilon}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/\varepsilon & \frac{1}{\varepsilon}+1 \\ 0 & 1/\varepsilon-1 & \frac{1}{\varepsilon}-1 \end{array}\right) \underset{R_2 \leftarrow R_2/\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/\varepsilon & \frac{1}{\varepsilon}+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_2 = 1$

$$x_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right) - \frac{1}{\varepsilon}x_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right) - \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

[$\frac{1}{\varepsilon}$ ו- $\frac{1}{\varepsilon}+1$ הם מספרים מאוד גדולים קרובים אחד לשני וכן יש ראשון [illegible]]

המחשב בפועל את $\varepsilon \ll 1$ למשל $\varepsilon = 10^{-20}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1+\cancel{\varepsilon} \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2-\frac{1}{\varepsilon}R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/\varepsilon & 1/\varepsilon \\ 0 & -1/\varepsilon & -1/\varepsilon \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{matrix}}$$

המספר אחד מיוצג ע"י $1.\underbrace{0\ldots0}_{15} \times 10^0$

אם $\varepsilon = 10^{-20}$ אז ε לא יכנס למספר

$\varepsilon = 1.0\ldots0 \cdot 10^{-20}$

$1/\varepsilon = 1.0\ldots0 \cdot 10^{20}$

$1/\varepsilon + 1 = 1.0\ldots0 \cdot 10^{20} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

$1+\varepsilon \approx 1$

דוגמא נוספת:

$$\begin{pmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0.3454 & -2.436 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.569 \\ 1.018 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{pmatrix}$$ הפתרון הנכון:

נניח שעובדים במחשב עם 4 ספרות (יש 4 ספרות ערך)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 1.566 & 1.569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{array}\right)$$

$$x_2 = \frac{-1805}{-1804} = 1.001$$

$$x_1 = \frac{1}{0.0003}\left[1.569 - 1.566 \cdot x_2\right] = 3.333 \neq 10$$

צריך להמנע ממצב שבו האיבר שבו מתחילים (ה-pevot) הוא קטן

(במקרה זה האיבר הוא 0.0003) צריך שאיבר זה יהיה גדול ונוסיף לשאר האיברים בעמודה - להפחית באותו סדר גודל.

נחליף בין השורות כדי להמנע ממצב זה; (ה-ε ב-$\varepsilon+1$ נופל בגלל העיגול מאותם שיקולים כמו קודם)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1+\varepsilon \end{array}\right) \underset{R_2 \leftarrow R_2 - \varepsilon R_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-2\varepsilon \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \boxed{\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{matrix}}$$

ובכך קיבלנו את התשובה הנכונה.

<u>דוגמא II</u>: שוב נחליף השורות.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{array}\right)$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{0.3454}\left(1.018 - (-2.436)x_1\right) = \underline{10.01}$$

Complete (Total) Pivoting

סורקים את המטריצה, מוצאים את האיבר הכי גדול (בערך מוחלט) ומאפסים את כל האיברים בעמודה שלו, לאחר מכן סורקים את כל המטריצה חוץ מהשורה המסומנת והמשתנים כמו קודם.

$$\begin{pmatrix} x & x & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & x & x \\ x & x & & x & x \\ x & x & & x & x \\ x & x & & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & x & x \\ x & 0 & \cdots & x & x \\ \cancel{x} & \cancel{x} & & \cancel{x} & \cancel{x} \\ x & 0 & & x & x \\ x & 0 & & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & x & 0 \\ x & 0 & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & x & 0 \\ x & 0 & \cdots & x & 0 \\ x & 0 & \cdots & x & 0 \end{pmatrix}$$

שזה לא יקרה מתמיד — לכן, לכן נפעיל או משתמשים באחר, אלא

במקום פשוט - Partial Pivoting

מחפשים את האיבר הגדול ביותר בעמודה הראשונה, מחליפים שורות
(עמודה שניה בלי שורה ראשונה)
ומאפסים את כל העמודה שלו. בשלב הבא מסתכלים על המלבן,
מחפשים את האיבר הגדול ביותר ומאפסים את כל שאר האיברים בעמודה.

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & x & x & x \\ 0 & a_{22} & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix} \cdots$$

<u>דוגמא</u>: נפעיל את תהליך ה-partial pivoting על המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

המטריצה P_1 מבצעת את הפעולה שנבצע על A לכן היא מטריצת היחידה עם שורות 1 ו-3 מוחלפות.

$$L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1/2 & 1 & & \\ -1/4 & 0 & 1 & \\ -3/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_1 A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \end{pmatrix}$$

כעת $7/4$ הוא האיבר הכי גדול בעמודה השנייה ללא השורה הראשונה.

לכן נרצה להחליף את שורות 2 ו-4

$$P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

כעת נרצה לאפס את שני האיברים המתאימים

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 3/7 & 1 & \\ 0 & 2/7 & & 1 \end{pmatrix} P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -2/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

$$P_3L_2\dots P_1A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}L_2\dots P_1A=\begin{pmatrix}8&7&9&5\\0&7/4&9/4&17/4\\0&0&-6/7&-2/7\\0&0&-2/7&4/7\end{pmatrix}$$

צריך להוסיף לשורה 3 את $-\frac{1}{3}$ השורה השניה

$$L_3P_3\dots P_1A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1/3&1\end{pmatrix}P_3\dots P_1A=\underbrace{\begin{pmatrix}8&7&9&5\\0&7/4&9/4&17/4\\0&0&-6/7&-2/7\\0&0&0&2/3\end{pmatrix}}$$

U - זוהי המטריצה המשולשית העליונה

לכן $L_3P_3L_2P_2L_1P_1A=U$.

$L_3P_3L_2P_2L_1P_1A$ לא משולשית תחתונה. משתמשים בטריק הבא:

נגדיר:

$L_3'=L_3$

$L_2'=P_3L_2P_3^{-1}$

$L_1'=P_3P_2L_1P_2^{-1}P_3^{-1}$

נתבונן ב:

$$L_3'L_2'L_1'P_3P_2P_1=L_3(P_3L_2\cancel{P_3^{-1}})(\cancel{P_3}P_2L_1\cancel{P_2^{-1}}\cancel{P_3^{-1}})\cancel{P_3}\cancel{P_2}P_1$$
$$=L_3P_3L_2P_2L_1P_1$$

ס III

ההבדל בין L_k ו- L_k' הוא שהאיברים מתחת לאלכסון הראשי מתחלפים.

נראה למשל עבור L_2':

$$L_2'=P_3L_2P_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&3/7&1&0\\0&2/7&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&3/7&0&1\\0&2/7&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2/7&1&0\\0&3/7&0&1\end{pmatrix}$$

(האיברים מתחת לאלכסון $\frac{2}{7}$ ו- $\frac{3}{7}$ התחלפו)

לכן $L_3P_3L_2P_2L_1P_1A=U \iff \underline{L_3'L_2'L_1'}\underbrace{P_3P_2P_1}_{P}A=U$

(מטריצת הפרמוטציה)

$$PA=(L_3'L_2'L_1')^{-1}U=LU$$

לכן התהליך לפתירת הבעיה הוא: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$PA\underline{x} = P\underline{b}$$

$$LU\underline{x} = P\underline{b}$$

$$\overbrace{\det P}^{\pm 1} \det A = \det(PA) = \det(LU) = \overbrace{\det L}^{1} \cdot \det U = \prod_i U_{ii}$$

(L משולשית תחתונה עם אלכסון 1 ... לכן הדטרמיננטה שלה היא 1)

התהליך מתבצע ב- $O(n^3)$ צעדים

<u>חוסר יציבות:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/8 & -1/16 & -1/16 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

נזכר בהגדרה של נורמה ∞:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = n \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 1$$

לכן $k(A) = n \quad \left(k = \|A\| \, \|A^{-1}\| \right)$

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 2 \\ & & 1 & & 4 \\ & & & 1 & 8 \\ & & & & 16 \end{pmatrix}}^{U}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & 1 & 1 & \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & -1/16 \\ & 1 & & & -1/8 \\ 0 & & 1 & & -1/4 \\ & & & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$\|L\|_\infty = n \qquad \|U\|_\infty = 2^{n-1}$$

$$\|L^{-1}\|_\infty = 2^{n-1} \qquad \|U^{-1}\|_\infty = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow k(L) = n \cdot 2^{n-1}, \qquad k(U) = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$$

באופן מעשי מצב זה של חוסר יציבות כמעט ולא קורה.

פירוק Q R (QR Factorization)

תהי מטריצה $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m > n$

$$A = Q \cdot R$$

כאשר Q מטריצה אורתוגונלית ו- R משולשית עליונה.

(תזכורת: $Q \cdot Q^* = I$ ($Q^* = (\bar{Q})^T$))

$$A = [a_1 | a_2 | a_3 | \dots]$$

נסמן ב- $\langle a_1 \dots a_k \rangle$ את תת המרחב הנפרש ע"י $a_1, \dots, a_k$.

- נמצא וקטורים q_k כך ש $\langle a_1 \rangle = \langle q_1 \rangle$

$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$

ו- $(q_j, q_k) = \delta_{jk}$ (מכפלה פנימית) (כלומר q_j ו- q_k אורתונורמליים)

$a_1 = r_{11} q_1$ (r_{11} סקלר כלשהו)

$a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$

$a_3 = r_{13} q_1 + r_{23} q_2 + r_{33} q_3$

$$A = \left(a_1 \middle| a_2 \dots \right) = \underbrace{\left(q_1 | q_2 | \dots \right)}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}}_{R}$$

Q אורתוגונלית כי העמודות שלה אורתונורמליות

<u>מציאת q - תהליך גרם שמידט</u> Gram-Schmidt

$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \Rightarrow \|q_1\| = 1$, $r_{11} = \|a_1\|$ $\left(r_{11} = \frac{a_1}{q_1} \right)$

$\tilde{q}_2 = a_2 - \overbrace{(a_2, q_1)}^{r_{12}} \cdot q_1$, $q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} \leftarrow r_{22}$

$\tilde{q}_3 = a_3 - \overbrace{(a_3, q_1)}^{r_{13}} \cdot q_1 - \overbrace{(a_3, q_2)}^{r_{23}} q_2$, $q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} \leftarrow r_{33}$

במקרה הכללי:

$\tilde{q}_n = a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{(a_n, q_j)}_{r_{jn}} \cdot q_j$, $q_n = \frac{\tilde{q}_n}{\|\tilde{q}_n\|} \leftarrow r_{nn}$

$$a_n = \underbrace{\|\tilde{q}_n\|}_{r_{nn}} q_n + \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{(a_n, q_j)}_{r_{jn}} q_j$$

$A = QR$

$\|Q^{-1} A\| = \|R\| \le \|Q^{-1}\| \, \|A\| = \|A\|$

$\|A^{-1} Q\| = \|R^{-1}\| \le \|Q\| \|A^{-1}\| = \|A^{-1}\|$

$\|R\| \|R^{-1}\| \le \|A\| \|A^{-1}\|$