

4/1/10

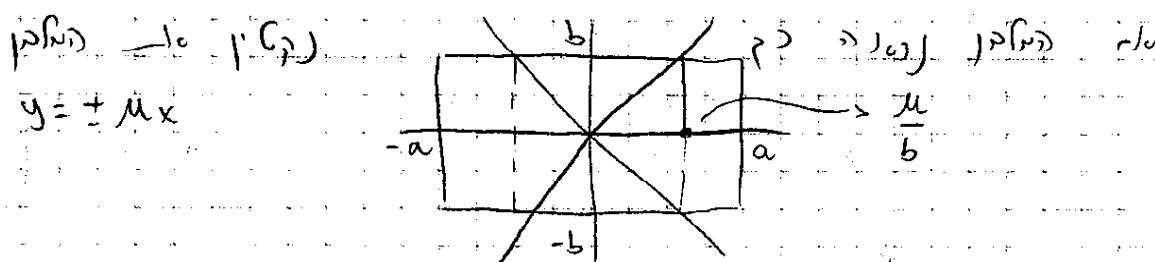
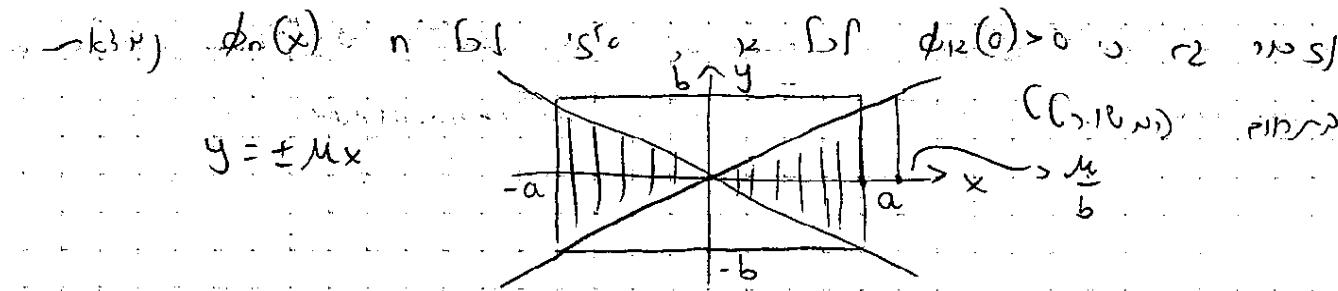
(3) מינימום - נס

בנוסף למשפט הקיים מינימום ומקסימום בקטע $[a, b]$ אם f רציפה בקטע $[a, b]$ אז קיימת נקודה x^* בקטע $[a, b]$ כך ש $f(x^*) \leq f(x)$ ל- $\forall x \in [a, b]$.

(1)

$|y| \leq b$, $|x| \leq a$ פונקציית $f(x, y)$ היא אורורה בקטע $[a, b] \times [-b, b]$. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ אז $|f(a, y)| = |\phi_0(y)|$ הוא מינימום ומקסימום בקטע $[-b, b]$. אם $\phi_{k+1}(\cdot)$ הוא מינימום ומקסימום בקטע $[-b, b]$ אז $|\phi_{k+1}(y)| \leq M$ ו- M מינימום ומקסימום בקטע $f(x, y)$. מינימום $|\phi_{k+1}(y)| = \phi_k(y)$ נקבע על ידי $y = \pm \frac{M}{b}$.

$$|\phi_{k+1}(x)| = |f(x, \phi_k(x))| \leq M$$



לפיכך $y \leq \min\{Ma, b\}$ ו- $b = \min\{a, \frac{M}{b}\}$ (32) ו-

ה證明 של $\{\phi_n\}$ מוגדרת כ- $|y| \leq b$ ו- $|x| \leq h$

$\{\phi_n(x)\}$ מוגדרת כ-

(2)

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + \dots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$$

$$= \phi_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)].$$

$\phi_0(x) = 0$, $\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)] \geq 0$ (לפי ה- ϵ ו- δ) $\phi_n(x) \geq 0$.

לפיכך $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \phi(x)$ (12). נזכיר ש- ϕ רציפה.

ההוכחה מושגת באמצעות מינימום ומקסימום בקטע $[-b, b]$.

אם f רציפה (או $R = \max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < \infty\right)$ אז $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq R < \infty$.

לפיכך $\forall i, j \in \mathbb{N}$ $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq R |y_1 - y_2|$.

$$|f(x, \phi_n(t)) - f(x, \phi_{n-1}(t))| < k |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$$

ר' 22 ב' 2023 כוונת ה- μ מינימום

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| = \left| \int_0^x [f(r, \phi_1(r)) - f(r, \phi_0(r))] dr \right| \leq \int_0^x |f(r, \phi_1(r)) - f(r, \phi_0(r))| dr \leq$$

$$\leq x \int_0^x |\phi_1(r) - \phi_0(r)| dr$$

(בנוסף), ($\phi_0(0) = 0$ נ.כ.) $\phi_0(r) = 0$ נ.כ.

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq \int_0^t |\phi_1(r)| dr \leq K \int_0^t |f(s, \phi_0(s))| ds \leq$$

$$\leq K \int_0^t dr \int_0^r |f(s, \phi_0(s))| ds \leq K\mu \int_0^t s ds dr =$$

$$= K\mu \int_0^t r dr = \frac{K\mu t^2}{2} \leq \frac{K\mu h^2}{2}$$

$$|\phi_0(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \frac{\mu K^{n-1} |t|^n}{n!} \leq \frac{\mu K^{n-1} h^n}{n!}$$

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \int_0^t [f(r, \phi_n(r)) - f(r, \phi_{n-1}(r))] dr$$

$$\leq \int_0^t |f(r, \phi_n(r))| dr \leq K \int_0^t |\phi_n(r) - \phi_{n-1}(r)| dr$$

$$\leq K \cdot \frac{\mu K^{n-1}}{n!} (|t|^n dr) = \frac{K^2 \mu^{n+1}}{n!} |t|^{n+1} \leq \frac{\mu K^n h^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|\phi_n(t)| \leq |\phi_1(t)| + |\phi_2 - \phi_1| + \dots + |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$$

$$\leq |\phi_1(t)| + \frac{1}{2} K\mu h^2 + \dots + \frac{K^{n-1} \mu h^n}{n!}$$

$$|\phi_1(t)| \leq \int_0^t |f(r, \phi_0(r))| dr \leq \mu \int_0^t dr \leq \mu |t| \leq \mu h$$

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{\mu}{K} \left[K h + \frac{(Kh)^2}{2!} + \dots + \frac{(Kh)^n}{n!} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n(t)| \leq \frac{\mu}{K} (e^{Kh} - 1)$$

ר' 23 ב' 2023 כוונת $\phi_n(t)$ נ.כ. נ.ח.

ר' 23 ב' 2023 כוונת $\{\phi_n(t)\}$ נ.כ. נ.ח. נ.מ. (לפניהם)

1. סדרת $\phi_n(t)$ נ.כ. נ.ח. נ.מ. (לפניהם) $\int_0^t \phi_n(r) dr$

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f(r, \phi_n(r)) dr = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(r, \phi_n(r)) dr = \int_0^x f(r, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(r)) dr =$$

ר' ה) פולינום ממעלה נמוך מ-3 מתקיים $\phi(x) = \psi(x)$

נוכיח $\phi(x) = \psi(x)$ ב3 שלבים

1. $\phi(x) = \psi(x) \Rightarrow \phi(r) = \psi(r) \forall r \in [0, x]$ (3)

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_r^x |f(r, \phi(r)) - f(r, \psi(r))| dr \leq K \int_r^x |\phi(r) - \psi(r)| dr$$

$$U'(x) \geq KU(x) \text{ by } (2) \Rightarrow U = \int_r^x |\phi - \psi| dr \quad (3)$$

$$U - KU \leq 0 \Rightarrow e^{Kx}(e^{-Kx}U) \leq 0 \Rightarrow U \leq 0$$

2. $\phi = \psi \Rightarrow U \equiv 0$ by (3) $U \geq 0$ by (2) $\Rightarrow U \equiv 0$