

היכחה 1. הינה $T \vdash_{\text{HPC}} A$ ו- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$. תרוויה $T \vdash_{\text{HPC}} B$.

(i) כפואות

$T \vdash_{\text{HPC}} A$ ו- $A \rightarrow B$

(ז) A

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $T \vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה (ii)

$T \leq T'$ ו- $T \vdash_{\text{HPC}} A$ מוכיחת $T' \vdash_{\text{HPC}} A$ ו- $T \leq T' \vdash_{\text{HPC}} A$ מוכיחת $T \vdash_{\text{HPC}} A$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} B$.

היכחה (iii)

$T \vdash_{\text{HPC}} B$ ו- $T \vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $T \vdash_{\text{HPC}} A$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} A$.

היכחה זו מוכיחת ש- $\vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $\vdash_{\text{HPC}} A$.

$T \vdash_{\text{HPC}} B$ ו- $T \vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $T \vdash_{\text{HPC}} A$.

$T \vdash_{\text{HPC}} B$ ו- $T \vdash_{\text{HPC}} A \rightarrow B$ מוכיחת $T \vdash_{\text{HPC}} A$.

230 תבנית $T \vdash_{\text{HPC}} A$, $B = A$ •

($A = B$) $\vdash B$ ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$

($\psi, \dots, \psi = A = B$) $\vdash T \vdash_{\text{HPC}} B$ תבנית $\vdash A = B$

לעתם נסמן $i, j < n$ ונקרא φ_i, φ_j (דארט φ_i, φ_j)

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : MP$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : MP$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

$\vdash T \vdash_{\text{HPC}} D$ $\vdash T \vdash_{\text{HPC}} C \rightarrow D$ $\vdash T \vdash_{\text{HPC}} C$ מגדיר MP $\vdash D$

$\vdash T \vdash_{\text{HPC}} C \rightarrow D$ $\vdash T \vdash_{\text{HPC}} C$ מגדיר MP $\vdash D$

לעתם

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

$\vdash_{HPC}(N)$ (i)

$\vdash_{HPC}(N_2)$ (ii)

$\vdash_{HPC}(N_1)$ (iii)

לעתם

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

(N) ① $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$

(N) ② $(\neg A \rightarrow B)$

MP 1,2 ③ $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg \neg A$

MP 3,4 ④ $(\neg A \rightarrow \neg B)$

MP 3,4 ⑤ $\neg \neg A$

N₂ ⑥ $\neg \neg A \rightarrow A$

MP 5,6 ⑦ A

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

לעתם נסמן $\varphi_i, \varphi_j : HPC$ $\vdash \varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1}$ φ_j נסמן $\varphi_i = \varphi_j$ כנראה (ב' ג' ה' תבנית $\vdash A = B$)

$$\vdash_{\text{HPC}} (\neg A \rightarrow A) \quad (\text{ii})$$

$$\vdash_{\text{HPC}} ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)) \quad \text{בנ"ג} \quad (\text{iii})$$

בנ"ג נסמן \vdash_{HPC} כ^ל (לעומת \vdash). \vdash_{HPC} ($A \rightarrow B$) \vdash_{HPC} ($A \rightarrow \neg B$) \vdash_{HPC} ($\neg A$). \vdash_{HPC} ($(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$) \vdash_{HPC} ($(A \rightarrow B), (A \rightarrow \neg B) \vdash_{\text{HPC}} \neg A$) \rightarrow מילוי ב^ל (לעומת מילוי ב^ר).

$$\vdash_{\text{HPC}} ((C \rightarrow D) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)) \quad \text{בנ"ג} \quad (\text{iv})$$

הוכחה: \vdash_{HPC} ($C \rightarrow D$) \vdash_{HPC} ($\neg C \rightarrow \neg D$) \vdash מילוי ב^ר (לעומת מילוי ב^ל). \vdash_{HPC} ($C \rightarrow D), \neg C \vdash_{\text{HPC}} \neg D$ \vdash מילוי ב^ר (לעומת מילוי ב^ל). \vdash_{HPC} ($C \rightarrow D), \neg C \vdash_{\text{HPC}} \neg D \vdash_{\text{HPC}} (\neg C \rightarrow \neg D)$ \rightarrow מילוי ב^ר (לעומת מילוי ב^ל).

$$(\text{HPC}) \text{ (i)} \vdash_{\text{HPC}} \neg C \rightarrow C$$

$$(\text{הא}) \text{ (2)} \neg C$$

$$(\text{1,2 MP}) \text{ (3)} C$$

$$(\text{GJG}) \text{ (4)} (C \rightarrow D)$$

$$(\text{MP 3,4}) \text{ (5)} D$$

$$(A \rightarrow B), (A \rightarrow \neg B) \vdash_{\text{HPC}} \neg A \quad \text{בנ"ג ופ"ג}$$

$$(\text{GJG}) \text{ (1)} (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$(\text{הא}) \text{ (2)} (A \rightarrow B)$$

$$(\text{MP 1,2}) \text{ (3)} (\neg A \rightarrow B)$$

$$(\text{GJG}) \text{ (4)} (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$$

$$(\text{הא}) \text{ (5)} (A \rightarrow \neg B)$$

$$(\text{MP 4,5}) \text{ (6)} (\neg A \rightarrow B)$$

$$(\text{N ופ"ג}) \text{ (7)} ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A))$$

$$(\text{MP 6,7}) \text{ (8)} ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$$

$$(\text{MP 8,3}) \text{ (9)} \neg A$$

שווין

3

 $(\neg A \rightarrow B), (A \rightarrow B) \vdash_{HPC} B$

• IC

בנוסף ל $B, C \vdash_{HPC} (\neg D \rightarrow C)$ בנו $(C \rightarrow D) \vdash_{HPC} (\neg D \rightarrow C)$
 נשים $D \vdash_{HPC} (\neg D \rightarrow D)$ ו $(C \rightarrow D) \vdash_{HPC} (\neg D \rightarrow C)$ ו $(D \rightarrow C) \vdash_{HPC} (\neg D \rightarrow C)$ ו $(\neg D \rightarrow D) \vdash_{HPC} (\neg D \rightarrow C)$ ו $(\neg D \rightarrow C) \vdash_{HPC} C$. אוניברסליות הינה!
 $(\neg D \rightarrow C) \vdash_{HPC} C$ נזקן!

I1 ① $\neg D \rightarrow (C \rightarrow D)$ (הנחה) ② $\neg D$ MP 1,2 ③ $(C \rightarrow \neg D)$ N1 ④ $(C \rightarrow D) \rightarrow ((C \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg C)$ (הנחה) ⑤ $(C \rightarrow D)$ MP 4,5 ⑥ $((C \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg C)$ MP 3,6 ⑦ $\neg C$ בנוסף ל $B \vdash_{HPC} (\neg A \rightarrow B), (A \rightarrow B) \vdash_{HPC} B$ נזקן!(הנחה) ① $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (הנחה) ② $(A \rightarrow B)$ MP 1,2 ③ $(\neg B \rightarrow \neg A)$ ונוסף ④ $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg \neg A)$ ⑤ $(\neg A \rightarrow B)$ MP 4,5 ⑥ $(\neg B \rightarrow \neg \neg A)$ N1 ⑦ $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg \neg A) \rightarrow \neg B)$ MP 7,3 ⑧ $((\neg B \rightarrow \neg \neg A) \rightarrow \neg B)$ MP 8,6 ⑨ $\neg \neg B$ N2 ⑩ $\neg \neg B \rightarrow B$

MP 9,10 ⑪ B

בנוסף ל $B \vdash_{HPC} (\neg A \rightarrow B), (A \rightarrow B) \vdash_{HPC} B$ נזקן!
 $(\neg A \rightarrow B), (A \rightarrow B) \vdash_{HPC} B$ נזקן!ויקון

$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash_{\text{HPC}} (A \rightarrow C) \circ 2$

2030 סענ' (A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A \vdash_{HPC} C ב' מילון פון אונד זרניך כרך ו'

לכזה

3

מ"ד ① (A \rightarrow B)

מ"ד ② A

MP 1,2 ③ B

מ"ד ④ (B \rightarrow C)

MP 3,4 ⑤ C

(A \rightarrow C) ס 2030 מ"ר י"ז מילון פון אונד זרניך כרך ו' (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash_{HPC} (A \rightarrow C) - N

2 סענ'

(A \rightarrow B), (A \rightarrow C) \rightarrow B \vdash_{HPC} B, מילון סענ' סענ'

$\vdash_{\text{HPC}} (\neg A \rightarrow (A \rightarrow C))$ סענ' זרניך כרך ו' (82)

A, $\neg A \vdash_{\text{HPC}}$ C ב' מילון פון אונד זרניך כרך ו' (82)

I 1 ① A \rightarrow (C \rightarrow A)

מ"ד ② A

MP 1,2 ③ (C \rightarrow A)

I 1 ④ $\neg A \rightarrow (C \rightarrow \neg A)$

מ"ד ⑤ $\neg A$

MP 4,5 ⑥ (C \rightarrow $\neg A$)

N 1 ⑦ (C \rightarrow A) $\rightarrow ((C \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg C)$

MP 3,7 ⑧ ((C \rightarrow $\neg A$) $\rightarrow \neg C$)

MP 3,6 ⑨ $\neg \neg C$

N 2 ⑩ (C \rightarrow C)

MP 9,10 ⑪ C

$\vdash_{\text{HPC}} ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ סענ' זרניך כרך ו'

(A \rightarrow B), ((A \rightarrow C) \rightarrow B), $\neg A \vdash_{\text{HPC}}$ B ב' מילון פון אונד זרניך כרך ו' (82)

(1 סענ') ① ($\neg A \rightarrow (A \rightarrow C)$)

מ"ד ② $\neg A$

MP 1,2 ③ (A \rightarrow C)

מ"ד ④ ((A \rightarrow C) \rightarrow B)

MP 3,4 ⑤ B

מילון פון אונד זרניך כרך ו'

2 סענ' ① ((A \rightarrow B) $\rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$

מ"ד ③ (A \rightarrow B)

MP 1,2 ③ ((A \rightarrow C) $\rightarrow (A \rightarrow B))$

מ"ד ④ ((A \rightarrow C) \rightarrow B)

MP 3,4 ⑤ ($\neg A \rightarrow B$)

מילון פון אונד זרניך כרך ו' ⑥ ((A \rightarrow B) $\rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$

מ"ד ⑦ ((A \rightarrow B) $\rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$

$$\vdash_{\text{FPC}} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \bullet 3$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vdash_{\text{FPC}} (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{הוכחה: } \text{בנוסף ל} \text{בנוסף}$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)), B \vdash_{\text{FPC}} (A \rightarrow C) \quad \text{הוכחה: } \text{בנוסף}$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)), B, A \vdash_{\text{FPC}} C \quad \text{הוכחה: } \text{בנוסף}$$

(כעת נראה דילוגה)

$$\text{① } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad \text{דילוג}$$

$$\text{② } A \quad \text{גנום}$$

$$\text{MP, 1,2 } \text{③ } (B \rightarrow C) \quad \text{הוכחה: }$$

$$\text{④ } B \quad \text{גנום}$$

$$\text{MP, 3,4 } \text{⑤ } C \quad \text{הוכחה: }$$

שאלה

$T_4 \subset T_{\text{cp}}$ ו- \exists הינה \exists

$\exists t, T \not\models A : A \vdash T$ (בנ"ס) $T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת. $T \models_{\text{cp}} A \Rightarrow \exists t$ (ווארכ-ו-ווארכ) $(T \models_{\text{cp}} A \rightarrow A \vdash T)$ מ"מ ב- \exists ת. $\exists t, T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת. $\exists t, T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת.

$L_4 \rightarrow T \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n = A$ מ"מ ב- \exists ת. $T \models_{\text{cp}} A \Rightarrow \exists t$ $T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת. $T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת. $\exists t, T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת.

$V \in C$ מ"מ ב- \exists ת. $T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת. $\exists t, V[A] = t$ מ"מ ב- \exists ת. $T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת. $\exists t, V[A] = t$ מ"מ ב- \exists ת. $T \models_{\text{cp}} A$ מ"מ ב- \exists ת.

$\forall n \in \mathbb{N}, A \in T \vdash \varphi_n, \exists t, A \vdash \varphi_n, \exists t, \forall n \in \mathbb{N}, A \in T \vdash \varphi_n, \exists t, A \in T \vdash \varphi_n, \exists t, \forall n \in \mathbb{N}, A \in T \vdash \varphi_n, \exists t, \forall n \in \mathbb{N}, A \in T \vdash \varphi_n$.

$\exists t, \forall n \in \mathbb{N}, A \in T \vdash \varphi_n$ מ"מ ב- \exists ת. $(V[A] = t \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, A \in T \vdash \varphi_n)$

$\exists t, V_1, V_2, V_3 \models_{\text{cp}} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ מ"מ ב- \exists ת. $V_1 \models_{\text{cp}} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ מ"מ ב- \exists ת. $V_2 \models_{\text{cp}} (B \rightarrow (A \wedge B))$ מ"מ ב- \exists ת. $V_3 \models_{\text{cp}} A \rightarrow B$ מ"מ ב- \exists ת.

$$V_1[(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))] = f \quad \text{מ"מ ב-} V_1, V_1 \models_{\text{cp}} (A \rightarrow B) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \exists t, (V_1[A], V_1[B \rightarrow (A \wedge B)]) = f \Rightarrow V_1[A] = t$$

$$V_1[(B \rightarrow (A \wedge B))] = f \Rightarrow \exists t, (V_1[B], V_1[(A \wedge B)]) = f$$

$$\Rightarrow V_1[B] = t$$

$$V_1[(A \wedge B)] = f \Rightarrow \wedge_{\exists t, V_1[A] = t, V_1[B] = t} V_1[A] = t, V_1[B] = t$$

מ"מ ב- \exists ת. $V_1[A] = t, V_1[B] = t$

$$V_2[(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C))] = f \quad \text{מ"מ ב-} V_2, V_2 \models_{\text{cp}} (A \rightarrow C) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \exists t, (V_2[A \rightarrow C], V_2[(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)]) = f \Rightarrow V_2[A \rightarrow C] = t \quad (1)$$

$$V_2[(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)] = f \quad (2)$$

$$\Rightarrow \exists t, (V_2[B \rightarrow C], V_2[((A \wedge B) \rightarrow C)]) = f \Rightarrow V_2[B \rightarrow C] = t \quad (2)$$

$$V_2[((A \wedge B) \rightarrow C)] = f \quad (2)$$

$$\Rightarrow \exists t, (V_2[(A \wedge B)], V_2[C]) = f \Rightarrow V_2[(A \wedge B)] = t \Rightarrow \wedge_{\exists t, V_2[A] = t, V_2[B] = t} V_2[A] = t, V_2[B] = t$$

$$\Rightarrow V_2[A] = t, V_2[B] = t \Rightarrow (1) \wedge (2) \quad V_2[(B \rightarrow C)] = t \Rightarrow \exists t, (V_2[B], V_2[C]) = t$$

$$(2) \Rightarrow V_2[(A \rightarrow C)] = t \Rightarrow \exists t, (V_2[A], V_2[C]) = t$$

$$\Rightarrow \exists t, (t, f) = t \quad \Rightarrow \text{מ"מ ב-} (t, f) = t$$

$$\Rightarrow \exists t, (t, f) = t \quad \Rightarrow \text{מ"מ ב-} (t, f) = t$$

$$V_3[(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)] = f \quad \text{?NIS, } V_3 \neq 4 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \rightarrow (V_3[(A \rightarrow B)], V_3[((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)]) = f \Rightarrow V_3[(A \rightarrow B)] = t \quad (1)$$

$$V_3[(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A] = f \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow_x (V_3[(A \rightarrow \neg B)], V_3[\neg A]) = f \Rightarrow V_3[(A \rightarrow \neg B)] = t \quad (3)$$

$$V_3[\neg A] = f \Rightarrow \neg_x (V_3[A]) = f$$

$$\Rightarrow [V_3[A] = t]$$

$$(2) \rightarrow_x (V_3[A], V_3[\neg B]) = t \Rightarrow \rightarrow_x (t, V_3[\neg B]) = t \Rightarrow V_3[\neg B] = t \quad (4)$$

$$(3) \neg_x (V_3[B]) = t \Rightarrow V_3[B] = f$$

$$(4) \rightarrow_x (V_3[A], V_3[B]) = t \Rightarrow \rightarrow_x (t, f) = t \Rightarrow$$

$$V[p_n] = V[A] = t \quad \text{[if } \exists n \in \mathbb{N} \text{ such that } p_n \text{ is a member of } T \text{]} \quad \text{?NIS, } V[p_n] = t \quad (5)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_i - \varphi_j \rightarrow \varphi_i = (\varphi_i \rightarrow \varphi_n), \varphi_i \text{ is a member of } T \text{ and } V[\varphi_i] = t, V[\varphi_n] = t \quad \text{?NIS, } V[\varphi_i] = t \quad (6)$$

$$V[(\varphi_i \rightarrow \varphi_n)] = t \Rightarrow \rightarrow_x (V[\varphi_i], V[\varphi_n]) \Rightarrow \rightarrow_x (t, V[\varphi_n]) = t \Rightarrow V[\varphi_n] = t = V[A]$$

8.5