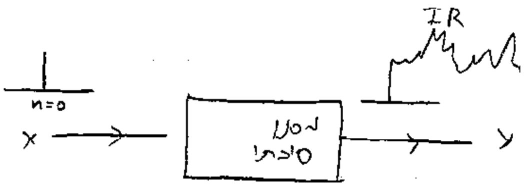
24.11.09

1

עיבוד אותות - שיעור 5

בפעם הקודמת התחלנו נושא חדש של זיהוי מערכת. המערכת לא ידועה ויש קלט ופלט. לנושא יש 2 גרסאות. בגרסה הראשונה (תוך כדי המעבר) ואנחנו יכולים להכניס מה שרוצים ולראות מה יוצא. (אנחנו צריכים "לדעת" מהי המערכת במובן שבהינתן קלט מסוים לדעת מה יהיה הפלט). השנייה שניתן לזהות מערכת רק אם המערכת היא מסנן.

נתחיל עם הבעיה הפשוטה יותר (הגרסה הראשונה). אנחנו יכולים להכניס איזה קלטים שנרצה. - באיזה קלטים כדאי לבחור? יש לכך 2 אסטרטגיות. האסטרטגיה הראשונה, היא אסטרטגיית "המקל" ("ההלם"), כלומר, הכנסת קלט שהוא 0 בכל מקום פרט לנקודת זמן בודדת.



אם המערכת היא מערכת ללא זיכרון, אז גם הפלט יהיה 0 בכל הזמנים, פרט למקום n=0.

באופן כללי, אם המערכת סיבתית, התגובה מההלם בזמן n=0 עם תגובה החל מנקודה זו. הפלט של קלט ה"הלם" נקרא "תגובת המערכת להלם".

FIR - מדובר על מסנן שבתגובה להלם, לאחר זמן סופי, תגובת המסנן תחזור להיות 0.

IIR - כאשר התגובה להלם המסנן אף פעם לא תחזור להיות 0.

דוגמה ל- FIR: $y_n = x_n + x_{n-1}$ (כאשר $y_0 = 1$).

דוגמה ל- IIR: $y_n = x_n + y_{n-1}$ (כאשר $y_0 = 1$).

טענה: תגובה להלם (IR) מכילה את כל האינפורמציה הקשורה למערכת. (כלומר, ניתן לזהות אותה).

הוכחה תהיה בשלבים. תחילה, אנחנו יודעים מה תהיה התגובה גם אם ההלם היה ב- n=1. הסיבה היא כיוון שהמערכת היא אינווריאנטית כלפי הזמן.

גם עבור אות שהוא 0 בכל מקום, פרט ל n=1 ו- n=0, אנחנו יכולים לדעת מה תהיה התגובה שאנחנו יודעים עבור n=0 ו- n=1 בנפרד (והמערכת היא ליניארית).

נזכר כי SUI פורש את כל הסיגנלים. כלומר, כיוון שאנחנו יודעים מה התגובה עבור כל פרט ב SUI וכל אות אנחנו יכולים לייצג כסכום של פרטים ב- SUI, אז אנו למעשה יכולים לזהות את תגובת המערכת לכל סיגנל.

ל-FIR התגובה היא סופית ולכן נדרש מספר סופי של מקדמים. - לעומת זאת, עבור IIR, לכאורה, מספר אינסופי של איברים.

סינוס הוא סיגנל סדמי של מסנן, תמיד יצא סינוס באותו התדר (מוכפל ומוזז/משתנה, לשנות/משרעת).
אם נכניס סינוס עם תדר אחר - התגובה לא ידועה.

$H(\omega)/H_k$

ω	A	ϕ
0	1.1	2°
1	1.2	3°
2		
3		

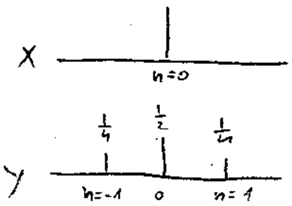
אם נכניס את הסינוסים עם התדרים השונים, נוכל לתאר את התגובה ע"י 2 מספרים. גם הטבלה שנקבל היא מספיקה לזיהוי המערכת. בהינתן סיגנל סינוס, נוכל ישר להסתכל בטבלה ונדע מה התגובה. אם נקבל סיגנל שהוא לא סינוס, נוכל לפרק אותו לסכום של סינוסים וקוסינוסים (לפי משפט פוריה). לכן, לאחר הפירוק, נדע עפ"י הטבלה מה יקרה עבור כל אחד מהאיברים. מכאן, עפ"י הליניאריות נוכל לדעת גם מה תהיה התגובה עבור הסיגנל המלא שקיבלנו.

לכן, גם תגובה לתדר, מכילה את כל האינפורמציה על המסנן.

IR - כיצד מחשבים אותו? נקרא לו h_n ונראה במספר דוגמאות כיצד לחשב אותו.

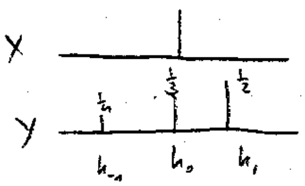
ניקח את המסנן (הלא סיבתי שראינו שהוא Low Pass): $y_n=\frac14 x_{n-1}+\frac12 x_n+\frac14 x_{n+1}$

נחשב את ה-IR, בפעם הראשונה ש$y\neq0$ הוא עבור $n=-1$ (עבור x הלם ב $n=0$)



במקרה הפשוט קיבלנו ש y הוא ממש המקדמים.

אם היינו לוקחים את המערכת $y_n=\frac12 x_{n-1}+\frac13 x_n+\frac14 x_{n+1}$ היינו שמים לב שעבורה שוב קיבלנו את המקדמים אך הפעם נוכל להבחין שהם בסדר הפוך.



$= h_1\cdot x_{n-1}+h_0\cdot x_n+h_{-1}\cdot x_{n+1}$ (1)

נשים לב שהכתיבה המפורשת מראה כי קיבלנו קונבולוציה (אינדקס h יורד ואינדקס x עולה).

גם אם היינו לוקחים מספר גדול יותר של מקדמים במסנן מסוג MA, נקבל אותה תוצאה מעבורה (1) אם מספר המקדמים סופי. המסנן הוא מסוג FIR.

באופן עקרוני, יש לנו ייצוג של כל מסנן בצורה הבאה: $y_n=\sum_l h_l\cdot x_{n-l}$ כאשר ה-h הם ה-IR. קונבולוציה בציר הזמן היא כפל בציר התדר (היינו) ולכן בציר התדר $Y_k=H_k\cdot X_k$

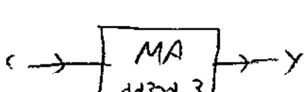
עוד קצת על סימונים...

בתחילת הקורס דיברנו על האופרטור $\hat{z}^{-1}$ כך ש $y=\hat{z}^{-1}x$; $y_n=x_{n-1}$. מה הקשר הפורמלי של z?

אם ניקח $\underbrace{x_n=z^n}_{\text{מספר}}$ אז נשים לב כי $\underbrace{\hat{z}^{-1}}_{\text{אופרטור}}\cdot\underbrace{z^n}_{\text{מספר}}=z^{n-1}=z^{-1}\cdot z^n=\underbrace{z^{-1}}_{\text{ערך עצמי של } \hat{z}^{-1}}\cdot x$

עכשיו נסתכל על הבעיה הקשה יותר: אנחנו יודעים מה נכנס ויוצא אך לא יכולים להשפיע על הקלט. בעית הבעיה יותר קשה, לפעמים לא נוכל לדעת אפילו מה הפיתרון. לפעמים, אם כל הזמן נכנס 0. בנוסף, גם אם ידוע לנו כל התהליך, הבעיה לא פשוטה ויכולה להיות קשה.

נניח וידוע לנו שהמסנן הוא MA עם שלושה מקדמים. כלומר הוא מהצורה: $y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$ ברגע שאנחנו יודעים את a_0,a_1,a_2 אנחנו יודעים מה המערכת (כי כך ידועה לנו התגובה להלם).



נעביר את הזמן של הפעם הראשונה שהקלט היה שונה מ0 להיות $n=0$ בנקודה זו אנחנו רואים מה x_0 ו y_0. נשים לב שלפני הנקודה הזו x_{n-2}, x_{n-1} היו 0 ולכן $y_0=a_0\cdot x_0 \Rightarrow a_0=\frac{y_0}{x_0}$ (נשים לב ש-x_0 הוא שונה מ0).

באותה צורה: $\underbrace{y_1}_{\text{ראינו (מדידה)}}=\underbrace{a_0}_{\text{חישבנו}}\cdot\underbrace{x_1}_{\text{ראינו (מדידה)}}+a_1\cdot\underbrace{x_0}_{\text{ידוע}} \Rightarrow a_1=\frac{y_1-a_0x_1}{x_0}$

ושוב באותה הדרך נגיע לכך ש a_2 להיות $a_2=\frac{y_2-a_0x_0-a_1x_1}{x_0}$.

29.11.09

3

עיבוד אותות - שיעור 5

נפתור שוב את הבעיה הפשוטה בצורה וקטורית:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

(1) (2) (3)

אנחנו בעצם מחפשים את (3), ואנחנו יודעים לגלות, ע"י הכפלה של (1) במטריצה ההפוכה של (2).

נשים לב שבמקרה הזה המטריצה משולשת תחתונה, מטריצה (2) היא גם מטריצה טֶפְּלִיצִית (כלומר, שהאלכסונים שלה מכילים אותו ערך לאורך האלכסונים).

נסתכל שוב על הבעיה אך הפעם כבר בלי ההנחה שלנו שערכי X אפס. (המסנן הוא עדיין MA עם 3 מקדמים).

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$$

יש לנו 3 נעלמים, כדי למצוא פתרון, אנו צריכים לפחות 3 משוואות.

$$y_{n+1} = a_0 x_{n+1} + a_1 x_n + a_2 x_{n-1}$$

$$y_{n+2} = a_0 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n$$

נשים לב שכדי למצוא 3 משוואות היינו צריכים ערכים של 5 זמנים עוקבים.

כדי לפתור את המשוואות, נרשום אותן בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_n & x_{n-1} \\ x_{n+2} & x_{n+1} & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

שוב קיבלנו מטריצה טפליצית. היינו מקבלים מטריצה כזו גם אם המטריצה הייתה מסדר 4x4, 5x5 וכך הלאה.

כדי להפוך מטריצה מסדר NxN אנחנו צריכים סדר גודל של $O(n^3)$. היום ניתן לעשות אפילו ב-$O(n^{2.7\cdots})$ (אנחנו נתייחס לסיבוכיות הדרושה כ-$O(n^3)$).

עם זאת, ישנן מטריצות שסיבוכיות ההפיכה שלהן יותר טובה, למשל, מטריצה טפליצית ניתן להפוך ב-$O(n^2)$. בנוסף מובטח שההופכי מוגדר ויחיד ("לא מקבלים זבל נומרי").

כלומר, הבעיה הזו של מסנן MA עם מספר ידוע של מקדמים, ניתנת לפתרון ע"י כתיבת משוואות, קבלת מטריצה טפליצית והפיכתה.

למשוואות אלו קוראים המשוואות של וינר הופף (Wiener - Hopf).

הפעם ידוע שהמסנן הוא מסנן AR עם 3 מקדמים: שוב 3 נעלמים לכן נרשום 3 משוואות:

$$y_n = x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + b_1 y_n + b_2 y_{n-1} + b_3 y_{n-2}$$

$$y_{n+2} = x_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n + b_3 y_{n-1}$$

ובצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ y_{n+1} & y_n & y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

שוב קיבלנו מטריצה טפליצית...

$$\underline{Y} = \underline{X} + \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{b} \Rightarrow \underline{b} = \underline{\underline{Y}}^{-1} (\underline{Y} - \underline{X})$$

כלומר, גם למסנן AR יש פתרון כי המטריצה היא טפליצית. למשוואות אלו קוראים יול-ווקר (Yule-Walker). (לא נתבלבל עם משוואות וינר-הופף עבור מסנני MA).

אם נחפש את המשוואות האלו, נקבל משוואות דומות אך שונות. הסיבה היא שכדי לחפש, אנחנו לא התייחסנו לרעש שיש בתוך הבעיה (כלומר אם נעשה את הבעיה פעמיים נקבל טיפה שינוי). לכן, כדי לקבל ערך קרוב יותר למקור, עלינו לדעת מידע. הבעיה היא שמידע לאחר היפוך המטריצה אינו פותר את בעיית הרעש (מטריצה מתמטית). לכן יש למצוא את המשוואות לפני שפותרים אותן.

מתבקש לחשוב שנמצא את התהליך עבור ARMA. אם נמצא את התהליך נקבל מטריצה שהיא לא טפליצית. כלומר, קשה בפרקטיקה לפתור את הבעיה.

קודם ראינו שגם הקטים מתחילים ב-0 אך מקבלים FIR. לעומת זאת, כאשר נדבר סוג של רקורסיה, אז ייתכן והאות ידעך ל-0 אך לא יהיה 0 ממש כמו ההגדרה של FIR ולכן יהיה IIR.

כלומר, ראינו של FIR זה סינון מסוג MA, ול IIR היו מסוג AR או ARMA.

שמנו לב קודם שבדיר התדר: $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$. (נשאלת השאלה למה לא לצפות ב-$Y(\omega)$ ו-$X(\omega)$ ולכן $H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$? הסיבה: יש הרבה נקודות בהם $X(\omega)=0$.

<u>תזכורת:</u> <u>פונקציה יוצרת</u> לוקחת סדרה והופכת אותה לפונקציה.
(אנו זקוקים לפונקציה יוצרת כי קשה להוכיח דברים על סדרות ועם פונקציות אנחנו יודעים לעשות הרבה).

לכן, כאשר נרצה להוכיח משהו על סדרה, נעשה זאת באמצעות הוכחה על הפונקציה המתאימה והשלכה על הסדרה.

<u>דוגמה:</u> סדרת פיבונאצ'י: $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ (1 1 2 3 5 8...) [עם 2 תנאי התחלה]. אם נרצה למצוא את f_{137}, נוכל לעשות זאת באמצעות רקורסיה (קשה מאוד). עם זאת, יש גם נוסחה ישירה לחישוב כל איבר באופן ישיר.

נזכר גם כי היחס בין שני מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י שואף לגבול שנקרא "יחס הזהב" (מסומן φ).

כדי למצוא את הנוסחה הישירה נשתמש בפונקציה היוצרת.

בהינתן סדרה $s_0, s_1, s_2, \dots$ נגדיר $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n\cdot x^n$.

כדי למצוא את הפונקציה היוצרת, נבצע סכום על כל אחד מהאיברים, לכן עבור פיבונאצ'י:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n$$

הפונקציה היוצרת שאנחנו מחפשים היא:

$$F(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots$$

לכן,

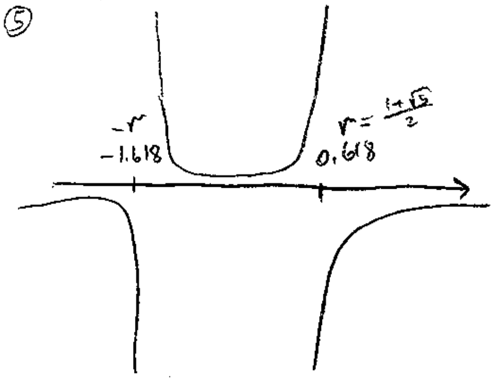
$$F(x) - 1 - x = x\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^{n-2}$$

$$F(x) - 1 - x = x\left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m\right) + x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m\right)$$

$$F(x) - 1 - x = x\left(F(x) - 1\right) + x^2\cdot F(x) \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}}$$

29.11.09
5

עיבוד אותות - שיעור 5



אם ניקח את הפונקציה $f(x)$ ונעשה את טור טיילור שלה נקבל מקדם את הטור של סדרת פיבונאצ'י, נקבל כי

$$f_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(r^{n+1}-\bar{r}^{n+1}\right)$$

פונקציה יוצרת של סדרה

$S(Z)$ מוגדר להיות: $S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\cdot z^{-n}$. לעומת הפונקציה היוצרת קיימים 3 הבדלים: תחילה, הטור הוא בין $-\infty$ עד ∞ ולא החל מ-0. ההבדל השני הוא שהחזקה היא שלילית (ולא חיובית). ההבדל השלישי (החשוב כיום) הוא בכך שאנו משתמשים ב-z ולא ב-x (כדי לסמן שהפעם אנחנו מדברים על מרוכבים ולא ממשים).

לדבר הזה קוראים <u>טרנספורם Z</u>. הטרנספורם לוקח סדרה והופך אותה לפונקציה. כלומר, $S(Z)$ הוא לא באמת טרנספורם! בנוסף, נקרא z כדי לרמוז על מספרים מרוכבים.

טרנספורם Z מקיים מספר תכונות חשובות:

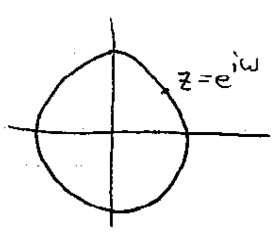
עבור סיגנל s_n, כדי לעבור מ-$S(z)$ ל-$S(\hat{z}^{-1}S)$ (עבור $y=\hat{z}^{-1}S$) נפעל כך:

$$S(\hat{z}^{-1}\cdot S)=\sum_{-\infty}^{\infty}s_{n-1}\cdot z^{-n}=z^{-1}\sum_{-\infty}^{\infty}s_{n-1}\cdot z^{-(n-1)}=z^{-1}\underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty}s_n z^{-n}}_{S(z)}$$

כלומר, קיבלנו כי

$$zT(\hat{z}^{-1}S)=z^{-1}\cdot zT(S)$$

זו הסיבה שאופרטור ההשהיה בזמן מסומן $\hat{z}^{-1}$ (במישור ה-z הוא מוכפל ב-z^{-1}).



נסתכל על המישור המרוכב של z. כיוון היתר נוח להסתכל על מעגל היחידה במישור ה-z. כל z שנמצא על המעגל הוא מהצורה $z=e^{i\omega}$.

אם נבדוק סכום על כל שורשי היחידה נקבל $\sum s_n\cdot z^{-n}$ וזה שווה ל-$\sum s_n e^{-i\omega n}$ וזהו טרנספורם פורייה. כלומר טרנספורם Z הוא בעצם הכללה של טרנספורם פורייה לכל מרחב המרוכבים

תזכורת לסדרות:

ראינו כי $1+\frac12+\frac14+\frac18+\dots=2$ שטענו זאת רק $S=1+\frac12+\frac14+\dots=1+\frac12(1+\frac12+\dots)$
$\Leftarrow S=1+\frac12 S \Leftarrow S=2$.

ההוכחה הזו עובדת רק כי S מתכנס במידה שווה. אחרת, ניתן להוכיח כי $\infty=-1$:

$$S=1+2+4+8+16\dots=1+2(1+2+4+8+16\dots)=1+2S\Rightarrow \underline{S=-1}$$