מודלים חישוביים – תרגול 09

סיבוכיות מקום

מודל לחישוב סיבוכיות מקום

סרט הקלט – קריאה. ראש נע לשני הצדדים.
סרט עבודה – קריאה וכתיבה. ראש נע לשני הצדדים.
סרט פלט – כתיבה. נע רק ימינה.

חישוב המקום הוא ע"פ כמות המקום בון השתמשנו בסרט העבודה.

PSpace

עבור פונ' $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נאמר ש- $SPACE(S(N))$ היא אוסף השפות המוכרעות במקום $O(S(n))$.
נגדיר $PSpace = \cup_{c=1} Space(n^c)$

<u>תרגיל:</u> הראה שהבעיה $Halt - LBA = \left\{ < \underset{LBA}{M}, x > \middle| M \text{ halts on } x \right\}$ שייכת ל-$PSpace$.
(LBA היא מכונה הדומה לטורינג, אך אינה יכולה לנוע מעבר למקום של הקלט)
<u>פתרון:</u>
הקלט הוא $< M, x >$, סרט העבודה מונה קונפיגורציות.
<u>אלגוריתם:</u>

1. נאתחל את סרט העבודה: $[\underset{begin}{>} \quad \underset{start\ state}{q_0} \quad \underset{input}{x} \quad \underset{conf}{\#} \quad \underset{counter}{1} \quad \ldots\ldots]$
   קונפ' במ"ט: מחרוזת $[w_1, q, a, w_2]$.
2. עבור $i = 1, \ldots \infty$:
   a. סורק את סרט העבודה וזוכר באיזה מצב ומעל איזה תו אני נמצא (q, a)
   b. קורא בסרט הקלט את $\delta(q, a)$
   c. מתקן את סרט העבודה בהתאם. למשל אם $\delta(q, a) = p, b, R$, נכתוב בסרט b, נעבור למצב p, ונזוז ימינה.
   d. מעלה את המונה ב-1.
3. אם הגענו למצב עצירה, נעצור.
   אם הגענו ל- $S + 1$ במונה, נעצור ונדחה. כאשר $S = \left|\underset{states}{Q}\right| \times \left|\underset{tape}{\Gamma}\right|^n \times \underset{head\ position}{n}$

<u>סיבוכיות</u>
אנו משתמשים ב- $n + 3 + logS$ מקום. לכן

$$n + 3 + log(|Q| \times |\Gamma|^n \times n) = O(n) + O(log|Q|) + O(n \cdot log|\Gamma|) + O(\log n)$$

<u>נכונות:</u>
אני בטוח עוצר.
אם עניתי כן, סימן ש-M עוצרת על x.
אם עניתי לא – לפי שובך היונים, חזרתי על קונ' פעמיים ואני בלולאה.

<u>תרגיל:</u>

$$QSAT = \{\phi | \phi \text{ is a true quantified boolean formula}\}$$

כלומר ϕ היא נוסחה בלי משתנים חופשיים, כל הכמתים בהתחלה, והיא נכונה. $\exists x_1 \forall x_2 \dots \exists x_n (\phi)$
הראה ש- $QSAT \in PSpace$.
<u>פתרון</u>: קלט: ϕ
<u>אלגוריתם:</u>

1. אם ב-ϕ יש רק קבועים, נשערך את הנוסחה ונחזיר T/F בהתאמה.
2. אם ϕ מהצורה $\exists x.\psi$, נקרא רקורסיבית לאלג' עבור ψ ונציב פעם אחת $x = 0$ ופעם שניה $x = 1$. נחזיר T אמ"מ אחת הריצות מחזירה T.
3. אם ϕ מהצורה $\forall x.\psi$, נקרא רקורסיבית לאלג' עבור ψ ונציב פעם אחת $x = 0$ ופעם שניה $x = 1$. נחזיר T אמ"מ שני הריצות מחזירות T.

<u>נכונות:</u>
ברור שנחזיר תשובה נכונה עבור כל אחד מהמקרים.

<u>סיבוכיות:</u> $|\phi| = n$. מספר המשתנים הוא m, כאשר $m < n$.
יש m קריאות רקורסיביות. עבור כל קריאה נרשום את הנוסחה פעמיים. אזי סה"כ נשתמש במקום $= O(m \cdot n)$ $O(n^2)$. ניתן גם לחשב:

$$S(n) = O(n) + S(n-2) = O(n^2)$$

תרגיל
הראה ש- $IS \oplus Clique = \{< G, k > | k \leq there's\ clique\ XOR\ IS\}$ ב- $NPHard, CoNPHard$.

פתרון
<u>רדוקציה:</u> $IS \underset{p}{\leq} IS \oplus Clique$:

$$< G, k > \rightarrow < G`, k` >$$

<u>בנייה:</u>

1. $G = (V, E) \quad G` = (V \cup W, E), |W| = |V|, W \cap V = \emptyset$
2. $k` = |V| + k$

<u>סיבוכיות</u>: פולינומית.

<u>נכונות:</u>

טענה: ב-G\` אין קליק בגודל $|V| + k$, כי אין קשתות בקודקודים שהוספנו.
אם ב-G יש IS בגודל $\leq k$ אז ב-G\` יש IS בגודל $\leq |V| + k$ ואין קליק כזה – כנדרש.

אם $G` \in IS \oplus Clique$ אזי ב-G\` יש IS בגודל $\leq |V| + k$ אזי ב-G יש IS בגודל $\leq k$ כי הקודקודים W תורמים עד $|V|$ קודקודים בלבד.

אם שפה L היא $NPHard$ אז $\bar{L}$ היא $CoNPHard$.
כלומר אם נראה רדוקציה $\overline{IS} \underset{p}{\leq} IS \oplus Clique$ אז סיימנו.

<u>בניה:</u>

1. נוסיף ל-G קליק בגודל $G`: k+1$
2. נגדיר $k` = k+1$

<u>סיבוכיות:</u> פולינומית

<u>נכונות:</u> $<G,k> \in \overline{IS}$ אז ב-G אין IS בגודל $\leq k$. אזי ב-`G ניתן להוסיף רק קודקוד אחד לכל IS ולכן אין IS בגודל $k` = k+1$. אבל יש קליק בגודל $k+1$ כנדרש.

$<G,k> \notin \overline{IS}$ אז יש IS בגודל $\leq k$. אזי ניתן להוסיף קודקוד מהקליק החדש ולקבל IS בגודל $\leq k+1$ וכן יש קליק בגודל $k+1$ כנדרש.