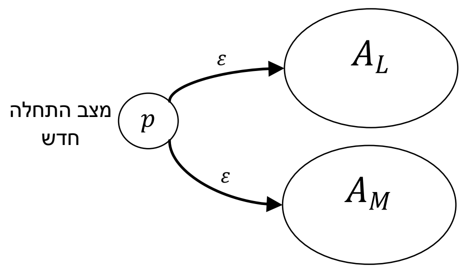
מודלים חישוביים – שיעור 11

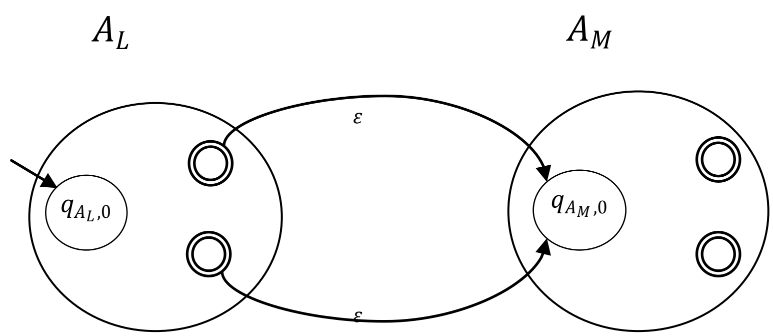
שפות רגולריות

טענות:

- $A \in DFA$ או $A \in NFA$ $\Leftarrow$ $x \in L(A)$ כריעה.
- כל שפה <u>סופית</u> היא רגולרית.
- L, M רגולריות, אזי <u>האיחוד</u> $L \cup M$ רגולרית.
  כי נוכל לבנות NFA:



- L, M רגולריות אז $L \cdot M$ (שרשור) = $\{xy | x \in L, y \in M\}$ רגולרי:



- <u>משלים</u> של שפה רגולרית הוא רגולרי גם כן.
  הופכים את המצבים המקבלים (עובד רק באוטומט דטרמיניסטי)
- <u>חיתוך</u> של רגולריות גם רגולרי כי $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$.
  לבדוק חיתוך יכול לקחת $2^{|M| \cdot |L|}$ בגלל המעברים מ-NFA ל-DFA.
  יש דרך ישירה לקבל אוטומט ב-$|L| \cdot |M|$.
- $L(A) = L(B)$ <u>כריעה</u>.
  בנייה: $L(A) \setminus L(B) = L(A) \cap \overline{L(B)}$, ואז בודקים אם מה שקיבלנו שקול ל-$\emptyset$.

בעיית המינימליציה

רוצים לבדוק אם האוטומט שלנו הכי קטן.

- ראשית מוחקים מצבים לא נחוצים.
  שנית מגדירים שפת המשך של מצב q, $L(q)$ = כל המילים שמתקבלות ממצב זה.

- נאחד מצבים עם שפות המשך שוות.
  אפשר לעשות זאת ע"י הגדרת המצבים כמצבי התחלה ואז לבדוק אם שפות האוטומטים שוות

אחרי 2 פעולות אלו מקבלים אוטומט מינימלי. נותר להוכיח זאת.

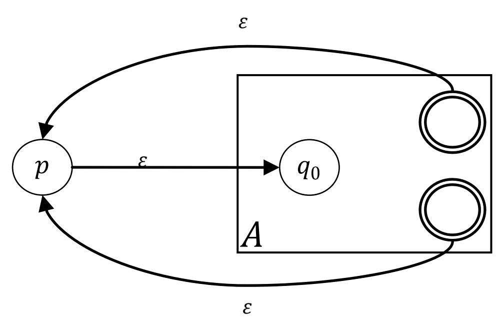
נראה כי אם A, B אוטומטים מינימליים ו-$L(A)=L(B)$ אז A,B זהים עד כדי שמות המצבים.

ראשית, ברור מבנייה כי בתוך A ובתוך B אין שתי מצבים שקולי שפה, ולכן לא יתכן ששני מצבים באותו אוטומט מקבילים לאותו מצב ב-B כי אז הם היו מקבילים (שווי שפות) לעצמם. לכן לכל מצב ב-A יש לכל היותר מצב מקביל אחד ב-B.
בנוסף, יש בדיוק מצב אחד מקביל מכיוון שכל המצבים נחוצים, כלומר מגיעים למצב מקבל (ואם יש מצב שאין לו מקבילה אזי יש מצב שמתקבל באחת ולא בשניה). כמו כן ידוע לנו שמצבי ההתחלה שקולים.

טענה

אם L רגולרית אז גם L^* רגולרית.

מוסיפים מצב התחלה חדש עם קשת ε למצב ההתחלה הקודם, ומעבירים את המצבים המקבלים ע"י ε למצב שהוספנו.



ביטוי רגולרי

לכל ביטוי רגולרי ניתן לבנות אוטומט סופי. גם ההפך נכון.

ביטוי רגולרי	משמעות	דוגמה
$+$	איחוד קבוצות	$a+b \equiv \{a\} \cup \{b\}$
$*$	*Kleene Star*	$a^* = \{a, aa, aaa, \dots\}$
$\cdot$	שרשור	$(a+b)^* \equiv \{a, b, ab, aa, bb, ba \dots\}$

פעולת התרגום מאוטומט לביטוי רגולרי מתבצעת ע"י שימוש ב-$L(q,r,S)$ - שפת כל המילים w שמתחילות במצב q, מסתיימות במצב r ועוברות רק דרך המצבים שבקבוצה S.

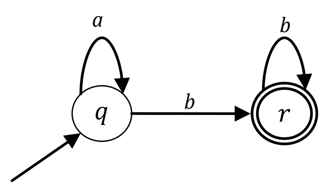
למשל $L(q,r,\emptyset)$ מסמן שחייבת להיות קשת ישירה בין q אל r, כלומר נקבל:

$$L(q,r,\emptyset)=\begin{cases} a+b+c & q \xrightarrow{a,b,c} r \\ \emptyset & \text{אין חץ בין } q \text{ ל } - r \\ \varepsilon & q=r \\ a+b+c+\varepsilon & \text{יש קשת עצמית מ } q=r, q \end{cases}$$

נשתמש בזה כדי לבצע הכללה:

$$L(q,r,S\cup\{s\}) = L(q,r,S) + L(q,s,S)\cdot L(s,s,S)^*\cdot L(s,r,S)$$

<u>דוגמה:</u>



$$L(q,r,\{q,r\}) =?$$

$$L(q,r,\{q,r\}) = \underbrace{L(q,r,q)}_{a^*b} + \underbrace{L(q,r,q)}_{a^*b}\cdot\underbrace{L(r,r,q)^*}_{(b+\varepsilon)^*}\cdot\underbrace{L(r,r,q)}_{b+\varepsilon}$$

וכעת חוזרים על כך רקורסיבית כדי לקבל קבוצה ריקה, ואת זה אנחנו יודעים לפתור:

$$\equiv a^*b + a^*b\cdot(b+\varepsilon)^*\cdot(b+\varepsilon) = a^*b + a^*bb^*(b+\varepsilon)$$