אלגוריתמים – הרצאה 08

אלג' של *Floyd-Warshall*

ממספרים את הקודקודים באופן שרירותי וקוראים להם $1,2,3,\dots,n=|V|$.

נניח שהאינדקס המקסימלי בצמתים הפנימיים הוא k. אז המק"ב הוא בגובה k.

נבנה מק"בים לפי גובה עולה.
כלומר, לכל i,j,k נחשב את אורך המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j, בגובה $\geq k$.
ונעשה זאת לפי k עולה $k=0,1,2,\dots$.
בסיום $k=n$ (אין אילוץ) נקבל את כל המק"בים.

$D_{ij}^{(k)}$ = אורך המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j בגובה $\geq k$.
$D^{(0)}=W$ מסלולים ללא צמתים פנימיים. כאשר W מוגדר כך:

$$W_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ \infty & (i,j)\notin E\\ W(i,j) & (i,j)\in E\end{cases}$$

נבנה את $D^{(k)}$ מתוך $D^{(k-1)}$: $D_{ij}^{(k)}$ שווה למינימלי בין $D_{ij}^{(k-1)}$ או אורך מינימלי של מסלול מ-i ל-j העובר דרך k ושאר הצמתים $\geq k-1$.

$$D_{ij}^{(k)}\leftarrow min\left\{D_{ij}^{(k-1)},D_{ik}^{(k-1)}+D_{kj}^{(k-1)}\right\}$$

<u>זמן ריצה:</u> $O(|V|^3)$

האלגוריתם הזה הוא דוגמה לשיטה שנקראת <u>תכנות דינמי</u>.

הערות לגבי פלויד – וורשל

1. <u>זכרון</u>
עקרונית האלג' מייצר $n+1$ מטריצות $D^{(0)},D^{(1)},\dots$.
בעצם מספיקה מטריצה אחת, במובן שלכל ערך חדש שחשבנו לאיזשהו $D_{ij}^{(k)}$ אפשר לשים ב-$D_{ij}^{(k)}$ עצמו.
2. האלגוריתם מחשב רק את <u>אורכי</u> המסלול, אם רוצים את המסלולים עצמם אז נשתמש במטריצה Π:
$$D_{ij}^{(k)}=\min\left\{D_{ij}^{(k)},D_{ik}^{(k-1)}+D_{kj}^{(k-1)}\right\}$$
אם הערך שונה אז
$$\Pi_{ij}^{(k)}\leftarrow\Pi_{kj}^{(k-1)}$$
אחרת $\Pi_{ij}^{(k)}\leftarrow\Pi_{ij}^{(k-1)}$

האלגוריתם של *Johnson*

אם המשקולות היו כולם אי שליליים, יכולנו להריץ את *Dijkstra* מכל צומת כצומת התחלה ולשלם בסך הכל $O(|V|^2 \, log|V| + |V| \cdot |E|)$.

האלגוריתם של *Johnson* הופך את המשקולות לאי שליליים ואז מריץ את *Dijkstra* $|V|$ פעמים.

טענה

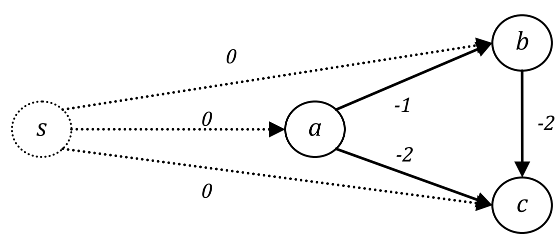
תהא h פונ' כלשהי על הצמתים $h: V \to \mathbb{R}$.
נגדיר משקלות חדשים $w^*(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$ לכל קשת (u,v).
אז מק"ב תחת w $\Longleftrightarrow$ מק"ב תחת w^*.
<u>הוכחה:</u> נקח מסלול כלשהו π: $v_1, v_2, \dots, v_k$, אז $w(\pi) = w(v_1,v_2) + \cdots + w(v_{k-1},v_k)$.

$$w^*(\pi) = w^*(v_1,v_2) + \cdots + w^*(v_{k-1},v_k)$$
$$= w(v_1,v_2) + h(v_1) - h(v_2) + \cdots + w(v_{k-1},v_k) + h(v_{k-1}) - h(v_k) \underset{h(v_i)-h(v_i)=0}{=} w(\pi)$$

הצעד הבא: לבנות פונ' h כך ש-$w^* \geq 0$ תמיד.

נבנה גרף חדש G`: נוסיף צומת חדש s כצומת התחלה ונוסיף את כל הקשתות מ-s לכל הצמתים של V ולכולן משקל 0.
נריץ בלמן-פורד על G` מ-s ונקח $h(v) = \delta(s,v)$.

דוגמא:



$$\delta(s,a) = 0 = h(a)$$
$$\delta(s,b) = -1 = h(b)$$
$$\delta(s,c) = -3 = h(c)$$

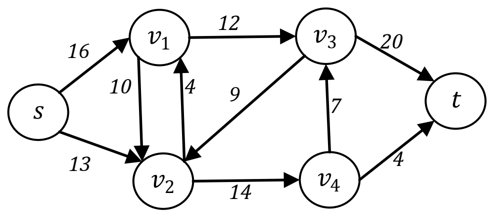
אם כל המשקולות הישנים $0 \leq$ אז $h \equiv 0$.

<u>הוכחה:</u>
צ"ל להוכיח לכל קשת (u,v) מתקיים $w^*(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v) \geq 0$
ואכן, מתקיים: $w(u,v) + \delta(s,u) \geq \delta(s,v)$

הערה

האלגוריתם של *Johnson* משתמש בייצוג הגרף ע"י רשימות שכנות ולא מטריצה.

זרימה ברשתות Network Flow



רשת זרימה

גרף מכוון $G=(V,E)$ עם צומת מקור s, מטרה t וקיבולים על הקשתות $c(u,v)>0$ - קבול הקשת (u,v).
באופן סתום, אם (u,v) אינה קשת אז $c(u,v)=0$.

בפועל, רק קשתות של E והאנטי-קשתות יזכו להתייחסות.

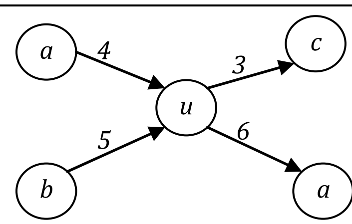
מניחים שכל צומת נגיש מ-s וש-t נגיש מכל צומת (צמתים אחרים הם חסרי תועלת). בפרט G הלא מכוון קשיר $|E|\geq|V|-1$.

זרימה

פונ' על הקשתות $f(u,v)$. $f: V\times V\to\mathbb{R}$ מוגדרת לכל זוג צמתים.
בפועל, f תקבל ערכים $0\neq$ רק על קשתות ואנטי קשתות.

זרימה חוקית מקיימת:

1. אלוצי קיבול $f(u,v)\leq c(u,v)$ לכל (u,v)
2. אנטי סימטריה $f(u,v)=-f(v,u)$ לכל (u,v)
3. שימור הזרימה: לכל צומת u $\sum_v f(u,v)=0$



$$\sum_v f(u,v)=f(u,a)+f(u,b)+f(u,c)+f(u,d)$$
$$=\ -4-5+6+3=0$$

<u>הערה:</u> נשים לב ש- $f(u,u)=0$ לכל u כוללל בגלל האנטי-סמטריה
הערה: אם (u,v) אנטי קשת ואינה אנטי קשת אז $f(u,v)=0$, כי אז:

$$f(u,v)\leq c(u,v)=0$$

$$-f(u,v)=f(v,u)\leq c(v,u)\geq 0\Longrightarrow f(u,v)=0$$

<u>ערך זרימה</u> f, שיסומן $|f|$ הוא סה"כ הזרימה הנכנסת ל-t:

$$|f| = \sum_{u \in V} f(u,t)$$

המטרה: לחשב זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.

<u>הערה:</u> בקשתות אנטי מקבילות נעדיף לקחת את הזרימה האפקטיבית – כלומר עם הקיבול הגדול יותר.

סימונים בעבודה עם זרימה

סימון מקוצר: $f(A,B) = \sum_{u \in A, v \in B} f(u,v)$ כאשר $A,B \subseteq V$

$$f(u,V) = f(\{u\},V)$$

לכל קבוצות X,Y f זרימה (חוקית) מתקיים: $f(X,Y) = -f(Y,X)$ - נובע מיידית מאנטי-סימטריה.

בפרט $f(X,X) = 0$ לכל קבוצה x.

אם X,Y זרות אז:

$$f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

$$f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$$

דוגמא: נוכיח $|f| = f(s,V)$

$$|f| = f(V,t), \quad V = \{t\} \cup (V \setminus \{t\})$$

$$0 = f(v,v) = f(V,t) + f(V, V \setminus \{t\})$$

$$|f| = -f(V, V \setminus \{t\}) = f(V \setminus \{t\}, V) = f(s,v) + \underbrace{\left(f(V \setminus \{s,t\}, V)\right)}_{=0}$$

השיטה של *Ford-Fulkerson*

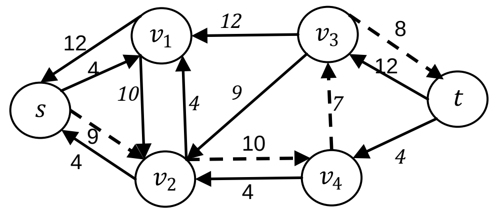
אתחול: $\forall (u,v). f(u,v) = 0$.

While Exists augmenting path
להגדיל את f ע"י הזרמה נוספת לאורך המסלול.

בכדי להגדיר מסלול משפר, נגדיר מושג חשוב:

הרשת השיורית - *Residual Network*

נתונה רשת זרימה G עם פונ' קיבול c s,t וכן נתונה זרימה חוקית f.
נסמן G_f
הצמתים V, הקשתות הן או אלה ב-E או אנטי קשתות.
לכל קשת (u,v) נגדיר קיבול שיורי $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$



בדוגמא שלנו:

$$c_f(s, v_1) = c(s, v_1) - f(s, v_1) = 16 - 12 = 4$$
$$c_f(v_1, s) = c(v_1, s) - f(v_1, s) = 0 — 12 = 12$$

מסלול משפר = מסלול מ-s ל-t ב-G_f. קשתות עם קיבול 0 אינן מופיעות ב-G_f.

אם p מסלול משפר, נסמן ב- $c_f(p)$ את הקיבול המינימלי של קשת של p = הקיבול השיורי של p.

אם p מסלול משפר שקבולו השיורי $c_f(p)$, נזרים דרך p זרימה נוספת בכמות $c_f(p)$.
נגדיר זרימה חדשה:

$$f(x) = \begin{cases} f(u, v), & (u, v) \notin p \\ f(u, v) + c_f(p), & (u, v) \in p \end{cases}$$