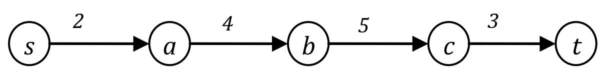
אלגוריתמים – שיעור 09

זרימה

בהנתן זרימה f בונים רשת שיורית $(V, E_f) = G_f$.
E_f מכילה קשתות מקוריות (u,v) עבורן $f(u,v) < c(u,v)$. ואנטי קשתות (u,v) עבורן $f(u,v) > 0$.
והקיבול השיורי $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$ תופס גם לקשתות ואנטי קשתות.

מסלול משפר p: מסלול מ-s ל-t ב-G_f. הקיבול השיורי של p $0 < c_p = min_{(u,v)\in p} c_f(u,v)$.
משפרים את f ע"י כך שלכל $(u,v) \in p$ $f^*(u,v) = f(u,v) + c_p$ וכל שאר הקשתות ללא שינוי, למעט האנטי קשתות של המסלול.

למשל:



יתכן כי (a,b) היא אנטי קשת ו-$f(b,a) = 4$. $c_p = 2$.

$$f^*(a,b) = f(a,b) + 2 = -4 + 2 = -2$$
$$f^*(b,a) = 2$$

טענה

f^* זרימה חוקית. $|f^*| = |f| + c_p > |f|$.
<u>הוכחה:</u> אילוץ קיבול $f^*(u,v) \le c(u,v)$ לכל קשת אם (u,v) קשת מקורית במסלול המשפר .

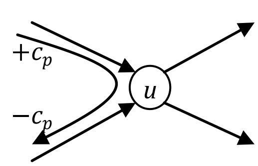
$$f^*(u,v) = f(u,v) + c_p \le f(u,v) + c_f(u,v)$$
$$= f(u,v) + \big(c(u,v) - f(u,v)\big) = c(u,v)$$

אם (u,v) קשת מקורית ו-$(v,u) \in p$ אז

$$f^*(v,u) = f(v,u) + c_p$$
$$f^*(u,v) = -f^*(v,u) = -f(v,u) - c_p = f(u,v) - c_p \le c(u,v)$$

בנוסף $c_f(v,u) = f(u,v) \ge c_p$. לכן $0 \le f^*(u,v)$.

שימור הזרימה: מספיק להניח ש-u על p.



$|f^*|$: נסתכל מה יוצא מ-s. הקשת הראשונה ב-p היא קשת מקורית ולכן לארכה הזרימה גדלה ב-c_p.
לכן הזרימה העוברת מ-s גדלה ב-c_p.

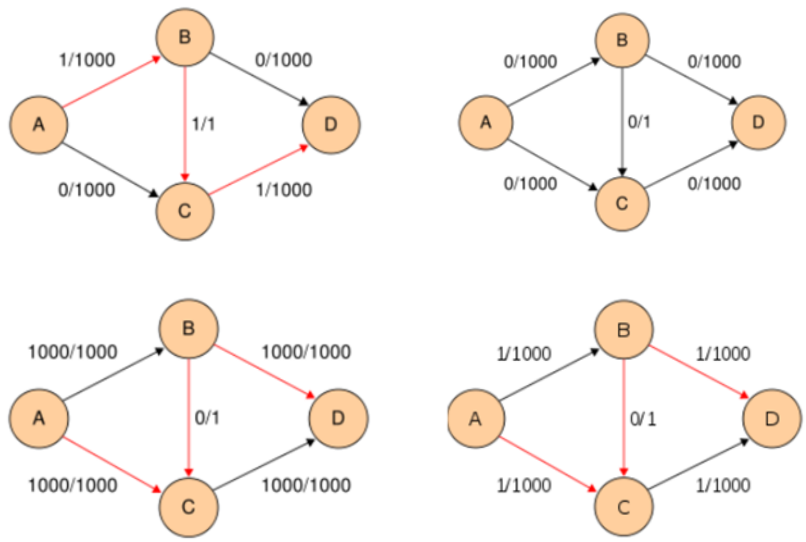
כאשר $f \equiv 0$ אז $G_f = G$.

אלגוריתם *Ford Fulkerson*

האלג' לא מציין איך למצוא את המסלול מ-s ל-t.

למשל נמצא ע"י BFS – מהי הסיבוכיות והאם האלגוריתם נכון, כלומר עוצר על f מקסימלי.

דוגמה לריצה לא יעילה של האלגוריתם:



האלגוריתם יקח בצורה כזאת 1000 צעדים.

למעשה, אם הקיבולים אי-רציונלים, אפשר לגרום ל-FF לא לעצור.
אם כל הקיבולים רציונלים, נמצא מכנה משותף ונהפוך את כולם לשלמים. אז FF תמיד יעצור.
מספר הצעדים הוא $\geq$ ערך הזרימה המקסימלית $|f^*|$.

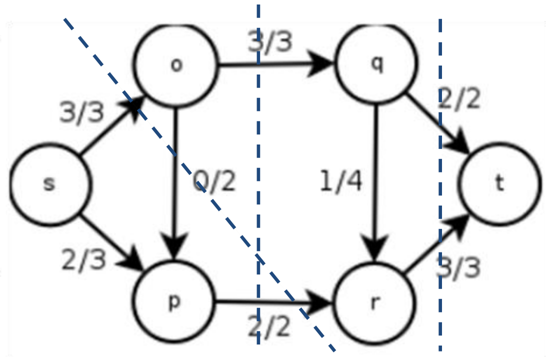
האלג' פועל כך שהקיבולים תמיד נשארים שלמים ולכן בכל צעד $c_p \geq 1$ ולכן כל צעד מגדיל את ערך הזרימה במספר שלם $1 \leq$.
$\Leftarrow$ עוצר אחרי $|f^*| \geq$ צעדים.

משפט *MAX FLOW – MIN CUT*

נגדיר חתך – חלוקה של V לשתי קבוצות זרות (S,T) כך ש-$s \in S, t \in T$.
הקיבול של חתך (S,T) הוא $c(S,T)$ והזרימה דרך החתך (S,T) היא $f(S,T)$.

דוגמה:

Cut	Capacity
$S=\{s,p\}, T=\{o,q,r,t\}$	$c(s,o)+c(p,r)=3+2=5$
$S=\{s,o,p\}, T=\{q,r,t\}$	$c(o,q)+c(p,r)=3+2=5$
$S=\{s,o,p,q,r\}, T=\{t\}$	$c(q,t)+c(r,t)=2+3=5$



טענה: לכל זרימה f ולכל חתך (S,T) מתקיים $|f| = f(S,T)$

למשל $S=\{s\}, T=V\setminus\{s\}$

$$f(S,T)=f(S,V\setminus S)=f(S,V)-f(S,S)=f(S,V)=\underbrace{f(\{s\},V)}_{|f|}+\underbrace{f(S\setminus\{s\},V)}_{=0}$$

טענה: לכל זרימה f ולכל חתך (S,T) מתקיים $f(S,T)\le c(S,T)$.

פשוט נראה לכל קשת (u,v) $u\in S, v\in T$ אם (u,v) קשת מקורית אז $f(u,v)\le c(u,v)$. ואם (u,v) אנטי קשת, כלומר (v,u) קשת $f(u,v)=-f(v,u)\le 0=c(u,v)$.

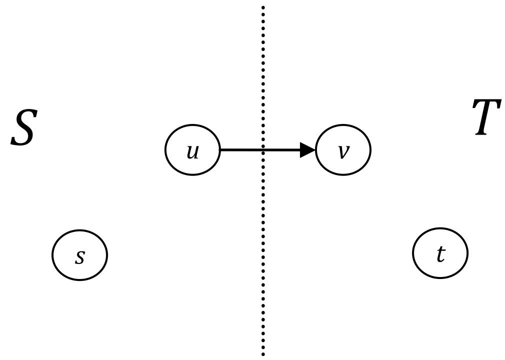
משתי הטענות נובע שערך כל זרימה $\le$ קבול כל חתך.
$\Leftarrow$ ערך זרימה מקסימלי $\le$ קבול מינימלי של חתך.

משפט *MAX FLOW – MIN CUT*:

התנאים הבאים שקולים:
1. f זרימה מקסימלית.
2. הרשת השיורית G_f לא מכילה מסלול מ-s ל-t.
3. $|f|=c(S,T)$ לאיזשהו חתך (S,T).

<u>הוכחה:</u>
<u>$1\to 2$:</u> ברור כי לו היה מסלול משפר היינו יכולים להגדיל את ערך הזרימה

<u>$2\to 3$:</u> נניח שב-G_f אין מסלול מ-s ל-t ונבנה חתך (S,T): נשים ב-S את כל הצמתים הנגישים מ-s ב-G_f וב-T את כל השאר. $t\in T, s\in S$ כי לפי ההנחה לא נגיש מ-s.
נראה $|f|=c(S,T)$, בעצם $f(S,T)=c(S,T)$. נראה זאת לכל קשת בחתך.
(u,v) קשת בחתך, $u\in S, v\in T$ ונראה $f(u,v)=c(u,v)$.



אם (u,v) קשת מקורית ונניח בשלילה $c_f(u,v) > 0 \leftarrow f(u,v) < c(u,v)$
$\leftarrow$ $(u,v) \in E_f$ $\leftarrow$ אם u נגיש מ-S ב-G_f. אז גם v נגיש מ-S, בסתירה לכך ש- $v \in T$.

אם (u,v) אנטי-קשת, כלומר (v,u) קשת, נטען $f(v,u) = f(u,v) = 0$. כי אם לא $f(v,u) > 0$ אז $f(u,v) <$ 0.
אז $(u,v) \in E_f$ וכמו קודם, v נגיש מ-s וסתירה.

<u>$1 \rightarrow 3$</u>: מיידי, כי לכל זרימה f מתקיים $|f`| \leq c(S,T)$ ולכן $|f|$ מקסימלית.

יעילות

הרעיון: לחפש מסלולים משפרים <u>קצרים ביותר</u> מבחינת מס' הקשתות ואותם נמצא ע"י BFS על הרשת השיורית.

נחסום את מספר האיטרציות של האלג' = מס' המסלולים המשפרים.

עלות האלגוריתם תהיה: מס' האיטרציות * עלות BFS.
כזכור, עלות BFS היא $O(|E|) = O(|E| + |V|)$.

נוכיח שמס' האיטרציות הוא $O(|E| \cdot |V|)$ ולכן הזמן הוא $O(|E|^2|V|)$.

<u>הוכחה</u>: אנו מריצים BFS על G_f מ-s, נסמן ב-$\delta_f(s,v)$ את המרחק (= מס' הקשתות) מ-s ל-v ב-G_f.
BFS בונה שכבות. s בשכבה ה-0.
בשכבה ה-j כל הצמתים במרחק j-מs. $j = 1,2,3,\ldots$. t ימצא בשכבה k ואז בעצם נתעלם מכל הצמתים האחרים שעוד לא התגלו. כמו כן גם בשכבה ה-k נחזיק רק את t. נשמור רק על קשתות משכבה לשכבה הבאה ונקבל רשת שכבתית.

טענה: אחרי כל איטרציה, לכל צומת v, המרחק $\delta_f(s,v)$ עולה (חלש). בפרט, המרחק $\delta_f(s,t)$ = מס' השכבות עולה.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שזה לא נכון, ונסתכל על האיטרציה הראשונה שזה קורה $\longleftarrow$ מצאנו צומת v שעבורו $\delta_f(s,v) < \delta_{f`}(s,v)$ ($f`$ = הזרימה שלב אחד קודם). ונבחר v כזה הכי קרוב ל-s עם $\delta_f(s,v)$ מינימלי.
מק"ב נוכחי ב-G_f מ-s ל-v: $s \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow u \rightarrow v$. $\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) - 1 \Leftarrow$ u צומת טוב $\delta_f(s,u) \geq \delta_{f`}(s,u)$.

$(u,v) \in E_f$, האם $(u,v) \in E_{f`}$? נניח שכן:

1. (u,v) קשת מקורית , $f`(u,v) < c(u,v)$
2. (u,v) אנטי קשת, $f`(v,u) > 0$.

בכל מקרה $\delta_{f`}(s,v) < \delta_{f`}(s,u)+1$ כי $(u,v)\in E_{f`}$.
$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u)+1 \leq$ ולכן v צומת טוב, ולכן $(u,v)\notin E_{f`}$ אבל $(u,v)\in E_f$.
זה יכול להיות רק אם הקשת הייתה על המסלול המשפר מ-$f`$ ל-f.

טענה: האלג' מבצע $O(|E||V|)$ איטרציות מסלולים משפרים

כאשר משפרים לאורך מסלול, לפחות קשת אחת עליו (u,v) נהיית <u>רוויה</u> = אותה קשת שקבולה השיורי = c_p.
קשת כזאת לא תופיע ברשת השיורית הבאה – קשת <u>קריטית</u>.

נקח קשת מסוימת (u,v) ונחסום את מס' הפעמים שהיא חוזרת לרשת השיורית ונראה שזה קורה $\geq$ בערך $\frac{|V|}{2}$ פעמים. יש לנו E קשתות $\longleftarrow$ אחרי $O(|E|\cdot|V|)$ שיפורים עוצרים.
(u,v) יצאה מהרשת השיורית אחרי ששפרנו מזרימה f. כלומר היא כל מק"ב ב-G_f מ-s ל-t (מסלול משפר) וקיים $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u)+1$.

לאחר מכן, היא חוזרת כאשר משפרים מזרימה $f`$. בדיוק כמו קודם, זה ייתכן רק אם $(v,u)$ (ההפוכה) הייתה על מסלול המשפר ב- $G_{f`} \Leftarrow \delta_{f`}(s,u) = \delta_{f`}(s,v)+1$.

$$\delta_{f`}(s,u) = \delta_{f`}(s,v)+1 \geq \delta_f(s,v)+1 = \delta_f(s,u)+2$$

לכן, בין יציאה של הקשת לכניסה מחדש, מרחק u מ-s גדל לפחות ב-2. ולכן זה יכול לקרות $\geq \frac{|V|-1}{2}$ פעמים.
לכן כל קשת יוצאת מהרשת $\geq \frac{|V|-1}{2}+1$.

לגירסה זו של FF קוראים האלג' של $Edmonds - Korp$.

נבנה רשת שיורית G_f, נריץ עליה BFS, ונקבל רשת שכבתית.