אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים

5.03.2004

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3 שעות . אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת , אבל לא יותר משתיים מבין שאלות 1 , 2 ו- 3. כל שאלה- 25 נקודות.

שאלה1

א. תהי f פונקציה רציפה על קבוצה $A \subset \mathbf{R}$ קומפקטית. הוכח כי $f(A)$ קומפקטית (20 נק') .

ב. בהסתמך על (א) , הוכח כי פונקציה רציפה על קבוצה קרומפקטית, חיא חסומה ומשיגה את חסמיה (5 נק').

שאלה 2

הוכח כי לכל סדרת ממשית יש ב- $\bar{\mathbf{R}}$, נקודת גבול הגדולה ביותר ונקודת גבול הקטנה ביותר.

שאלה 3

תהי $f: I \to R$ (I רווח) פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $x_0 \in I$, ותהי $r_n(x)$ השארית מסדר n שבנוסחת Taylor של f בנקודה x_0. הוכח כי
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

שאלה 4

א. הסדרה (a_n) מוגדרת ע"י: $a_1 = \frac{1}{2}$ ולכל $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} = a_n - a_n^3$. הוכח כי קיים $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ וחשב אותו.

ב. כמה פיתרונות קיימים למשוואה $\alpha x = \ln x$.

F-68

שאלה 5

א. האם הפונקציה $f(x)=\frac{x}{1+e^x}$ רציפה במדה שווה על **R** ? .נמק.

ב. חשב את $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

שאלה 6

א. הראה שלכל $x>0$ קיים $1+2\ln x\le x^2$.

ב. חשב את $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\sin x-\frac{1}{2}(x+tgx)}{x^3}$

שאלה 7

תהי $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח כי קיימת סדרה (x_n) ב-(a,b),
כך ש $x_n\to x_0$, ו- $f'(x_n)\to f'(x_0)$.

בהצלחה!

10 - 10

מחברת מס' ____ מתוך ____ מחברות	062595

35

אוניברסיטת תל-אביב

35

לפני התחלת הבחינה מלא את
וקרא בעיון

תאריך הבחינה 5.3.04

שם הקורס תמ"ל 1

שם המורה ד"ר גבי לבשטין

החוג/המגמה מס' המתמ. - מערכות

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

[redacted]

הוראות

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום. 25
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים. 25
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.

6 23

7 25

98

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 98 (תשע"ח)

המחברת נבדקה ביום _____

חתימת המורה _____

(1) (א) תהי y_n סדרה ב- $f(A)$. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת נקודה x_n השייכת ל- A כך ש- $f(x_n) = y_n$.
הלא רקורסיבה A הינו קבוצה קומפקטית אז לסדרה (x_n) קיימת תת סדרה (x_{n_k}) המתכנסת לגבול ב- A. יהי $x_{n_k} \to x_0$. הלא f הינו בעל רציפה על A ולכן $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, לכן $y_{n_k} \to f(x_0)$. מכיוון שלכל סדרה ב- $f(A)$ קיימת תת סדרה המתכנסת לגבול ב- $f(A)$, לכן $f(A)$ קבוצה קומפקטית.

(ב) על סמך סעיף א' $f(A)$ הינו קבוצה קומפקטית. כפי הינו חסומה, יהי $m = \inf f(A)$, $M = \sup f(A)$. כידוע m ו- M כן נק' סגור של $f(A)$. מכיוון ש- $f(A)$ הינו קבוצה סגורה מתקיים $m, M \in f(A)$.
מכאן ש קיימים u, v ב- A כך ש- $f(u) = m$ ו $f(v) = M$.

(3) צ"ל

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

<u>הוכחה:</u> יהי $f(x)=(x-x_0)^n$. מתקיים:

$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ \dots,\ f^{n-1}(x_0)=0,\ f^{n}(x_0)=n!$$

לכן

$$r_n(x_0)=0,\ r_n'(x_0)=0,\ \dots,\ r^{n-1}(x_0)=0,\ r^{n}(x_0)=0$$

נפעיל את משפט קושי על $f(x)$ ו- $r_n(x)$ ונקבל שקיימת נקודה ξ_1 בין x ל-x_0 כך ש-

$$\frac{r_n(x)}{f(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{f(x)-f(x_0)}=\frac{r_n'(\xi_1)}{f'(\xi_1)}$$

נפעיל שוב את משפט קושי ונקבל את ξ_2 בין x_0 ל-ξ_1 (לכן גם בין x ל-x_0) כך ש-

$$\frac{r_n'(\xi_1)}{f'(\xi_1)}=\frac{r_n'(\xi_1)-r_n'(x_0)}{f'(\xi_1)-f'(x_0)}=\frac{r_n''(\xi_2)}{f''(\xi_2)}$$

לאחר $n-1$ פעמים נקבל נקודה ξ בין x ל-x_0 כך ש-

$$\frac{r_n(x)}{f(x)}=\frac{r_n^{n-1}(\xi)-r_n^{n-1}(x_0)}{f^{n-1}(\xi)-f^{n-1}(x_0)}=\frac{\dfrac{r_n^{n-1}(\xi)-r_n^{n-1}(x_0)}{\xi-x_0}}{\dfrac{f^{n-1}(\xi)-f^{n-1}(x_0)}{\xi-x_0}}=\frac{A(\xi)}{B(\xi)}$$

יהי x_k סדרה ב-$I-\{x\}$ המתכנסת ל-x. לכל $k\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה ξ_k כך ש-

$$\frac{r_n(x_k)}{f(x_k)}=\frac{A(\xi_k)}{B(\xi_k)}$$

ξ_k נמצאת בין x_k ל-x_0.

לכן $\xi_k\to x_0$. לכן $A(\xi_k)\to r_n^{n}(x_0)=0$

$B(\xi_k)\to f^{n}(x_0)=n!\neq 0$. מכאן ש- $\frac{r_n(x_k)}{f(x_k)}\to 0$.

יהי (x_k) הכל סדרה כלשהי ב-$I-\{x\}$, מכאן שגם סדרה ב-$I-\{x_0\}$ המתכנסת ל-x ולכן לפי טלר:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{f(x)}=0$$

6 א

$f(x) = 1 + 2\ln x - x^2$

נגזרת

$f(x) \le 0$ עבור $x > 0$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 2x = \frac{2}{x} - 2x$

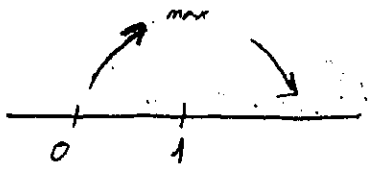
$f'(x) = 0 \iff \frac{2}{x} - 2x = 0$

$2 - 2x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

לקיצוניות $x = 1$ הנגזרת משנה סימן מחיובי לשלילי.



$\lim_{x \to 0^+} (1 + 2\ln x - x^2) = -\infty$

הפונקציה שואפת ל $-\infty$ ולכן לפונקציה אין אסימפטוטה אנכית לכן הקיצוניות מקומית זו גם מרבית בכל הפסקה. מתקיים שבקטע $(0,\infty)$ $f \le 0$ ולכן מתקיים $1 + 2\ln x \le x^2$.

(2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\sin x - \frac{1}{2}(x+\tan x)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot e^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cos^2 x}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{x^2}\sin x + 2x\cdot(2x e^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x) + 2x e^{x^2}\cos x - e^{x^2}\sin x - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}\sin x + 4x^2 e^{x^2}\sin x + 4x e^{x^2}\cos x - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x e^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x + 8x\cdot e^{x^2}\sin x + 4x^2(2x\cdot e^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x) + 4e^{x^2}\cos x + 4x(2x e^{x^2}\cos x - e^{x^2}\sin x) + \frac{(2\cos x\cos^3 x + 2\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot\sin x)}{\cos^6 x}}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x e^{x^2}\sin x + 8x^3 e^{x^2}\sin x + 5e^{x^2}\cos x + 8x^2 e^{x^2}\cos x - \frac{2\cos^4 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x}}{6x} =$$

$$= \frac{5-2}{0} = \infty$$

ניקח סדרה (y_n) כלשהי ב- (a,b)
שמתכנסת ל- x_0. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה
x_n שמקיימת לפי משפט לגרנז' ו

$$f'(x_n) = \frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n - x_0}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ x_n בין y_n ל- x_0. מכאן
ש- $x_n \to x_0$. לכן

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$f'(x_n) \longrightarrow f'(x_0)$$ כלומר

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\sin x - \frac{1}{2}(x+\tan x)}{x^3} = \frac{e^{x^2}\sin x - \frac{\sin x}{2\cos x} - \frac{x}{2}}{x^3} = \overset{=G'C}{\frac{\frac{e^{x^2}2\sin x\cos x - \sin x - x\cos x}{2\cos x}}{x^3}} =$$

$$= \frac{e^{x^2}\sin 2x - \sin x - x\cos x}{2x^3\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \frac{2x\cdot e^{x^2}\sin 2x + 2e^{x^2}\cos 2x - \cos x - (\cos x - x\sin x)}{6x^2\cos x - 2x^3\sin x} =$$

$e^{\sin 1} - \frac{1}{2} + \frac{\tan 1}{2}$ — 1

גזירה

לינ' טבעית $x_n \to x_0$ ב (a,b).

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ לא קיים אם y_n מקיים

$$f'(x_n) = \frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n - x_0}$$

x_n כי y_n $x_0 - \delta$ לכן $y_n \to x_0$.

$$\lim_{x_n \to x_0} f'(x_n) = \lim \frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n - x_0} = f'(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim \frac{e^{x^2}\sin x}{x^3} = \frac{2x e^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x}{3x^2} = \infty$$

$$\cancel{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5}{x} = \frac{x(5 \cdot \frac{5}{x})}{x} = 5}$$

$$\lim \frac{-\frac{1}{2}(x \cdot \tan x)}{x^3} = \lim \frac{\frac{x}{2x} - \frac{\tan}{2\tan}}{x^3} = \lim \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cos^2 x}}{3x^2} =$$

$$\lim \left(\sqrt{x + \sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right) = \lim \left(\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} + 1\right)\right) =$$

$$= \lim \left(\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} + 1\right)\right) = \lim \left(\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}} + 1\right)\right) =$$

$$= \lim \left(\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{1.5}}}} + 1\right)\right) = \infty$$

$$f(x) = \frac{x}{1+e^x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+e^x} = \frac{1}{e^x} = 0 \qquad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1 + e^x + x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + x \cdot e^x + 1}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + xe^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \frac{e^x(x+1)+1}{(1+e^x)^2}$$

$$e^x + x \cdot e^x + 1 = e^{2x} + 2e^x + 1 \qquad x = 1 \to \frac{e^1 + 1}{e^2 + 2e + 1} < 1$$

$$\cancel{a + xa + 1 = a^2 + 2a + 1} \qquad x = 0 \quad \frac{1+1}{1+2}$$

$$a^2 + a + xa = 0$$

$$a(a+1+x) = 0 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -1-x$$

:PC

לכל x קיים ξ_n בין x_0 ל-x_n. אם

$\xi_n \to x_0$ ו $A(\xi)$ מתקיים $r_n^{(n)}(x_0)=0 \leftarrow$ -1

$B(\xi)$ $\leftarrow$ $f^{(n)}(x_0)=n!$. אם כן $\frac{r_n(x)}{p(x)} \to 0$.

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{+2\cdot\cos x + \sin x}{\cos^4 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\sin x - \frac{1}{2}(x+\tan x)}{x^3} = \frac{0-0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \frac{2x\cdot e^{x^2}\cdot \sin x + e^{x^2}\cos x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \frac{0+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \frac{2\cdot e^{x^2}\sin x + 2x\cdot(2x e^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x) - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\sin x}{\cos^3 x}}{6x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} 1\cdot \ln x - x^2 =$$

$$\lim \frac{e^{x^2}\sin x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\tan x}{x^3} = \lim\left(\frac{e^{x^2}\sin x}{x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\tan x}{2x^3}\right)$$

$$e^{2x} + 2e^x + \cancel{1} - e^x - xe^x - \cancel{1} > 0$$

$$f(x) = e^{2x} + e^x - xe^x > 0$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + e^x - (e^x + x\cdot e^x) = 2e^{2x} - xe^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cos x)^{-2} = -2(\cos x)^{-3}\cdot -\sin x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$