

5.03.2004

F-71

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי I
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3 שעות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת, אבל לא יותר משתיים מבין
שאלות 1, 2 ו-3. כל שאלה-25 נקודות.

שאלה 1

- א. תהי f פונקציה רציפה על קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ קומפקטית. הוכח כי $f(A)$ קומפקטית (20 נק').
- ב. בהסתמך על (א), הוכח כי פונקציה רציפה על קבוצה קרומפקטית, היא חסומה ומשיגה את חסמיה (5 נק').

שאלה 2

הוכח כי לכל סדרת ממשית יש ב- $\bar{\mathbb{R}}$, נקודת גבול הגדולה ביותר ונקודת גבול הקטנה ביותר.

שאלה 3

תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I רווח) פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $x_0 \in I$, ותהי $r_n(x)$ השארית מסדר n שבנוסחת Taylor של f בנקודה x_0 . הוכח כי

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

שאלה 4

א. הסדרה (a_n) מוגדרת ע"י: $a_1 = \frac{1}{2}$ ולכל $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n - a_n^3$. הוכח כי קיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ וחשב אותו.}$$

ב. כמה פיתרונות קיימים למשוואה $\alpha x = \ln x$.

שאלה 5

א. האם הפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$ רציפה במדה שווה על \mathbb{R} ? נמק.

ב. חשב את $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

שאלה 6

א. הראה שלכל $x > 0$ קיים $1 + 2 \ln x \leq x^2$ ✓

ב. חשב את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x - \frac{1}{2}(x + \tan x)}{x^3}$ ✓

שאלה 7

תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a, b)$. הוכח כי קיימת סדרה (x_n) ב- (a, b) כך ש- $x_n \rightarrow x_0$ ו- $f'(x_n) \rightarrow f'(x_0)$.

בהצלחה!

10 - 10

מחברת מס' _____	062595
מתוך _____ מחברות	

35
אוניברסיטת תל-אביב

35

**לפני התחלת הבחינה מלא את
 וקרא בעיון**

תאריך הבחינה _____ 5.3.04

שם הקורס _____ 1 מנהל

שם המורה _____ זכאי

החוג/המגמה _____ תלמידי הנדסה - אלקטרוניקה

מס' זיהוי
 (העתק: מכרטיס הנבחן/התלמיד)

הוראות

1. על הנבחן להיכחן רק בחדר שבו הוא רשום. 25
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים
 בחדר ליד שולחן קשור ואמצעי תקשורת אחרים
 כשהם כבויים. 25
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך
 לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר
 שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום
 המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט
 מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את
 מקומו ולא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה
 או בבקשה ירים את ידו. 6 23

לשימוש המורה הבוחן:

7 25

98-

הציון
המחברת נבדקה ביום _____

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

3

3

... $f(x) = (x-x_0)^n$...

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) = n!$$

$$r_n'(x_0) = 0, r_n''(x_0) = 0, \dots, r_n^{(n-1)}(x_0) = 0, r_n^{(n)}(x_0) = 0$$

... $r_n(x) = 1$... $f(x)$... $f'(x)$... $f''(x)$... $f^{(n)}(x)$...

... $x_0 - \delta$... x ... ξ ... $x_0 + \delta$...

$$\frac{r_n(x)}{f(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{r_n'(\xi)}{f'(\xi)}$$

... $\xi_1 - \delta$... x_0 ... ξ_2 ... $x_0 + \delta$...

$$\frac{r_n'(\xi_1)}{f'(\xi_1)} = \frac{r_n'(\xi_1) - r_n'(x_0)}{f'(\xi_1) - f'(x_0)} = \frac{r_n''(\xi_2)}{f''(\xi_2)}$$

$$\frac{r_n(x)}{f(x)} = \frac{r_n^{(n)}(\xi) - r_n^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)} = \frac{A(\xi)}{B(\xi)}$$



... $x_0 - \delta$... x_k ... ξ_k ... $x_0 + \delta$...

$$\frac{r_n(x_k)}{f(x_k)} = \frac{A(\xi_k)}{B(\xi_k)}$$

$r_n(x_k) \rightarrow 0$... $f(x_k) \rightarrow 0$... $\xi_k \rightarrow x_0$... $f^{(n)}(x) = n!$...

... $I - \{x\}$... $x_0 - \delta$... $x_0 + \delta$...

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{f(x)} = 0$$

$$f(x) = 1 + 2 \ln x - x^2$$

$$f(x) \leq 0$$

$$x > 0$$

max

0

①

⑥

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 2x = \frac{2}{x} - 2x$$

$$\frac{2}{x} - 2x = 0$$

$$\leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$2 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

max

max

$$x = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2 \ln x - x^2) = -\infty$$

$(0, \infty)$
 $1 + 2 \ln x \leq x^2$
 $f \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x - \frac{1}{2}(x + \tan x)}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cos^2 x}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^{x^2} \sin x + 2x \cdot (2x e^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x) + 2x e^{x^2} \cos x - e^{x^2} \sin x - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}{3x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x + 4x^2 e^{x^2} \sin x + 4x e^{x^2} \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x + 8x \cdot e^{x^2} \sin x + 4x^2 (2x e^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x) + 4e^{x^2} \cos x + 4x (2x e^{x^2} \cos x - e^{x^2} \sin x)}{6x} =$$

$$\frac{(2 \cos x \cos^3 x + 2 \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot \sin x)}{\cos^6 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x e^{x^2} \sin x + 8x^3 e^{x^2} \sin x + 5 e^{x^2} \cos x + 4x^2 e^{x^2} \cos x - \frac{2 \cos^4 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}}{6x} = \frac{5-2}{0} = \infty$$

$$= \frac{5-2}{0} = \infty$$

✓

1.2.7 3/1/8 P 7 = Se

7

(a,b) - λ ... (y_n) ... $x_0 - \delta$...
 קטנה \rightarrow קטנה $n \in \mathbb{N}$ δ $x_0 - \delta$...
 δ δ δ δ x_n

$$f'(x_n) = \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}$$

$x_0 - \delta$ y_n x_n $n \in \mathbb{N}$ δ ...
 $x_n \rightarrow x_0 = \dots = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$f'(x_n) \rightarrow f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \frac{1}{2}(x + \tan x)}{x^3} = \frac{e^{x^2} - \frac{1}{2}(x + \tan x)}{x^3} \stackrel{=0/0}{=} \frac{e^{x^2} \cdot 2x - \frac{1}{2}(1 + \sec^2 x)}{3x^2} = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cos x - \sin x - x \cos x}{2x^2 \cos x} =$$

$$= \frac{e^{x^2} \sin 2x - \sin x - x \cos x}{2x^2 \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$= \frac{2x \cdot e^{x^2} \sin 2x + 2e^{x^2} \cos 2x - \cos x - (\cos x - x \sin x)}{6x^2 \cos x - 2x^3 \sin x} =$$

$$\frac{e^{\sin x} - \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2}}{1}$$

2/1/6

(a,b) $\rightarrow y_n \rightarrow x_0$ $\rightarrow \delta$ $\rightarrow \delta$

$$f(y_n) \rightarrow f(x_0)$$

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0) = \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}$$

$x_n \rightarrow x_0$ $\rightarrow \delta$ $x_0 - \delta$ y_n $\rightarrow \delta$ x_n

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} f'(x_n) = \lim_{y_n \rightarrow x_0} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x}{x^3} = \frac{2x e^x \sin x + e^x \cos x}{3x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x + \tan x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} - \frac{\tan x}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cos^2 x}}{3x^2}$$

$$\lim (\sqrt{x} - \sqrt{x+\sqrt{x}}) = \lim (\sqrt{x} (\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - 1)) =$$

$$= \lim (\sqrt{x} (\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1)) = \lim (\sqrt{x} (\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^3}}}} - 1)) =$$

$$= \lim (\sqrt{x} (\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}}}} - 1)) = \infty$$

$$f(x) = \frac{x}{1+e^x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+e^x} = \frac{1}{e^x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{x+e^x+x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x+x e^x+1}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x+x e^x+1}{e^{2x}+2e^x+1} = \frac{e^x(x+1)+1}{(1+e^x)^2}$$

$$e^x+x e^x+1 = e^{2x}+2e^x+1$$

$$x=1 \rightarrow \frac{e^2+1}{e^2+2e+1} < 1$$

$$a^2+2a+1 = (a+1)^2$$

$$x=0 \quad \frac{1+1}{1+2+1}$$

$$a^2+2a+1 = (a+1)^2$$

= OTC

$\mu \cdot x_n - \delta \quad x_0 \quad \mu \cdot x_n \quad \delta \cdot E_n \quad \mu \cdot x_n \quad \delta \cdot E_n$
 $-1 \quad f'_n(x) = 0 \leftarrow A(\epsilon) \quad \mu \cdot x_n \quad \delta \cdot E_n \rightarrow x_n \quad \epsilon$
 $\frac{f_n(x)}{f(x)} \rightarrow 0 \quad \mu \cdot x_n \quad \delta \cdot E_n \quad f''(x) = n! \leftarrow B(\epsilon)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x - \frac{1}{2}(x + \tan x)}{x^3} = \frac{0 \cdot 0}{0} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)' = \frac{+2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} \cdot \sin x + e^{x^2} \cos x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \frac{0 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^{x^2} \sin x + 2x \cdot (2xe^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x) - \frac{1}{x} \cdot \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}{6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \ln x - x^2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\tan x}{x^3} = \lim \left(\frac{e^{x^2} \sin x}{x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\tan x}{2x^3} \right)$$

$$e^{2x} + 2e^{2x}x - e^x - xe^x > 0$$

$$f(x) = e^{2x} + e^x - xe^x > 0$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + e^x - (e^x + x \cdot e^x) = 2e^{2x} - xe^x = 0 \iff$$

$$(\cos x)^2 = \frac{\partial \sin x}{\partial (\cos x)^3} \cdot \sin x = \frac{\partial \sin x}{\cos^3 x}$$